1. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0　② -1　③ 1　④ -10　⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

2. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$

$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$

(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로

$ab+2=0,\ a+2=0$

따라서 $a=-2,\ b=1$

$\therefore a+b=-1$

3. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$(-2x^3\times b)\times 2+(x^2\times ax)\times 2=(-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

4. 서로 다른 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수$(x \neq y \neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

5. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

6. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab} \\
&= \frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc} \\
&= \frac{-(a^3+b^3+c^3)}{abc} \\
&= \frac{-3abc}{abc}=-3
\end{aligned}
$$

해설

$$
\begin{aligned}
& a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&= \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) \\
&= \frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a} \\
&= \frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a} \quad (\because\ a+b+c=0) \\
&= -3
\end{aligned}
$$

7. 다항식 $f(x)$를 $(3x+2)(x-4)$로 나눈 나머지가 $-2x+1$일 때, $f(x^2+3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 7 ② 4 ③ 0 ④ -4 ⑤ -7

해설

$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x + 1 \cdots$ ①
$f(x^3+3) = (x-1)Q'(x) + R \cdots$ ②
① 의 양변에 $x = 4$를 대입하면 $f(4) = -7$
② 의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $f(4) = R$
$\therefore\ R = -7$

8. 다항식 $f(x)$를 $ax+b(a \neq 0)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 한다. $xf(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x) = (ax+b)Q(x) + R$

$= a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x) + R$

$\therefore\ x \cdot f(x)$

$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x) + Rx$

$= ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x) + R\left(x+\frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}R$

$= \left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\} - \frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x) = (ax+b)Q(x) + R$에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a}) = R$

$x \cdot f(x) = \left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x) + R'$이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a}) = R'$

$f(-\frac{b}{a}) = R$를 대입하면 $R' = -\frac{b}{a}R$

9. 다항식 $f(x)$, $g(x)$에서 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 2이고 $g(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지가 $2x+1$이다. $2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2,$

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1,$

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot2+3\cdot3=13$

10. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3+3x^2-10x-24$라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

① $x^2-x-6,\ x^2+6x+8$　　② $x^2-3x-1,\ x^2+x+8$

③ $x^2-4x+3,\ x^2-x+2$　　④ $x^2-x-2,\ x^2-3x+8$

⑤ $x^2-3x-6,\ x^2+3x+7$

해설

두 다항식을 $A=aG,\ B=bG$ ($a,\ b$는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$이므로
$A=a(x+2),\ B=b(x+2)$
따라서, $L=ab(x+2)$
$=x^3+3x^2-10x-24$이다.
이 때, 최소공배수 L은 최대공약수 $x+2$를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
$L=(x+2)(x-3)(x+4)$
$a,\ b$는 일차식이므로
$a=x-3,\ b=x+4$ 또는 $a=x+4,\ b=x-3$
따라서, 두 다항식은
$(x-3)(x+2)=x^2-x-6$과 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$이다.

11. 두 다항식 x^2+x-2, x^3+2x^2-3x의 최대공약수를 $G(x)$, 최소공배수를 $L(x)$라 할 때, $G(2)+L(2)$의 값을 구하면?

① 1 ② 11 ③ 21 ④ 31 ⑤ 41

해설

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$x^3+2x^2-3x=x(x-1)(x+3)$

$\therefore G(x)=x-1$

$L(x)=x(x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore\ G(2)+L(2)=1+40=41$

12. 두 다항식 $A = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$, $B = x^2 - (k+2)x + 2k$ 의 최소공배수가 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 2　② -2　③ 3　④ -3　⑤ -5

해설

$A = (x+3)^2(x-2)$, $B = (x-2)(x-k)$

따라서 A, B 의 최소공배수 L 은

$(x+3)^2(x-2)(x-k)$

이것이 $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ 의 꼴이 되려면

$x - 2 = x - k$

$\therefore\ k = 2$

13. 두 다항식 x^2+ax-2, x^2-5x+b의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

각 식에 $x=2$을 대입하면 0이 된다.

i) x^2+ax-2에 $x=2$를 대입하면

$4+2a-2=0 \therefore\ a=-1$

ii) x^2-5x+b에 $x=2$를 대입하면

$4-10+b=0 \therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=-1+6=5$

14. 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+2x^2+ax+6 일 때, 상수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

최대공약수 $G = x+2$
최소공배수는 G를 인수로 가지므로
$x=-2$를 최소공배수에 대입하면 0이 된다.
x^3+2x^2+ax+6
$=(-2)^3+2(-2)^2+a(-2)+6$
$=-8+8-2a+6$
$=-2a+6=0$
$\therefore\ a=3$

15. 두 다항식 $x^3+2x^2-x-2,\ 2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

$2x^3+(a-2)x^2+ax-2a=(x-1)(2x^2+ax+2a)$

최대공약수가 이차식이 되기 위해서는

$f(x)=2x^2+ax+2a$가 $x+1$

또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.

그런데 $f(-2)=8-2a+2a\neq 0$이므로

$f(x)$는 $x+2$를 인수로 가지지 않는다.

따라서, $f(-1)=2-a+2a=0\ \therefore\ a=-2$