

1. $a + b + c = 0$ 일 때, $\frac{a^2 + 1}{bc} + \frac{b^2 + 1}{ac} + \frac{c^2 + 1}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) + c(c^2 + 1)}{abc} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc}\end{aligned}$$

그런데, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이므로

$$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

2. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수 ($x \neq y \neq z$) 이므로

$$x + y + z = 0$$

3. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$a + b + c = 0$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이다.

$$\begin{aligned}
 (\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \\
 &= \frac{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c)}{abc} \\
 &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\
 &= \frac{-3abc}{abc} = -3
 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}
 &a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\
 &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\
 &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{b+c}{a} \\
 &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \quad (\because a+b+c=0) \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

4. 두 다항식 $x^2 - 3x + a$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^2 - 3x + a, x^2 + bx - 6$ 은

$(x - 1)$ 을 인수로 가지므로 $a = 2, b = 5$

$\therefore x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$

$f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지 $f(2) = 0$

5. 두 다항식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 과 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 의 최대공약수가 이차식일 때, a 의 값은?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a \text{에}$$

$$x = 3 \text{ 대입, } 81 + 9a - 81 - 3a - 6a = 0$$

$$x = -2 \text{ 대입, } -24 + 4a - 36 + 2a - 6a \neq 0 \text{ 이므로}$$

$x-1$ 을 인수로 가져야 한다.

$$x = 1 \text{ 대입 } 3 + a - 9 - a - 6a = 0, a = -1$$

6. 두 다항식 $x^2 + 3x + a$, $x^2 - 3x + b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 최소공배수를 구하여라.

① $x^3 + 3x^2 - 12x + 8$

② $x^3 - 3x^2 + 10x - 8$

③ $x^3 + x^2 - 10x + 8$

④ $x^3 - 9x + 8$

⑤ $x^3 + 2x^2 - 8x + 10$

해설

최대공약수는 두 식의 인수이므로 인수정리를 이용하여 a , b 를 구한다.

$$1 + 3 + a = 0 \quad 1 - 3 + b = 0 \text{에서 } a = -4 \quad b = 2$$

$$\therefore x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

그러므로 두 다항식의 최소공배수는

$$(x - 1)(x - 2)(x + 4) = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

7. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x + 2) - (x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 1)(x - 2)$$

$$2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a - 2)x - 2) \cdots \textcircled{1}$$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x = -2, -1, 1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$$x = -2 \text{ 일 때, } 8 - 2a + 4 - 2 = 0, a = 5$$

$$x = -1 \text{ 일 때, } 2 - a + 2 - 2 = 0, a = 2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 + a - 2 - 2 = 0, a = 2$$

$x = -1, 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x + 1)(x - 1)$

$$\therefore a = 2$$