

1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}}$ 과 값이 같은 것은?

- ① $\alpha + 1$ ② $\alpha - 2$ ③ $\frac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

$$x^4 + x^3 - x - 1 = 0$$

$$x^3(x+1) - (x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3-1) = 0$$

$$\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x^2+x+1=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1, \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^{100} + \frac{1}{\beta^{100}} = (\alpha^3)^{33}\alpha + \frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta}$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta} = \frac{2}{\beta}$$

2. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 틀린 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega^3 = 1$

③ 1의 세제곱근은 1, ω , ω^2 으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2 = \bar{\omega}$ (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega = -\omega^2$

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1 \cdots \text{①, ②}$$

$$x = 1, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면 } \cdots \text{③}$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega} \cdots \text{④}$$

$$\omega = -1 - \omega^2 \cdots \text{⑤(거짓)}$$

3. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1}$ 의 값을 구하면?
(단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① 2

② 3

③ 5

④ -3

⑤ -5

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근은

$$\omega, \bar{\omega} \Rightarrow \omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0, \omega^3 - 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0,$$

$$(\bar{\omega} - 1)(\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1) = 0,$$

$$\bar{\omega}^3 - 1 = 0, \bar{\omega}^3 = 1$$

$$\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1} = \frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega + 1}$$

$$= \frac{2\omega^2}{-\omega^2} + \frac{3\bar{\omega}}{-\omega^2}$$

$$= -2 + \frac{3\omega\bar{\omega}}{-\omega^3}$$

$$= -2 - \frac{3}{1} = -5$$

4. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$

④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1 \text{ 에서 } x^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x-1=0, \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

$$\therefore x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha\beta &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$ 의 값을 구해도 된다.

5. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

$$(1) \omega^{20} + \omega^{10} + 1$$

$$(2) \omega^{101} + \bar{\omega}^{101} - \omega^{11} \cdot \bar{\omega} - \omega \cdot \bar{\omega}^{11}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 0

▶ 정답 : 2

해설

ω 가 $x^2 - x + 1$ 의 근이므로

$\bar{\omega}$ 도 $x^2 - x + 1$ 의 근이다.

즉, $\omega^3 = -1$, $\bar{\omega}^3$

$= -1$, $\omega^2 - \omega + 1 = 0$

(1) $\omega^{20} + \omega^{10} + 1$

$= (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega + 1$

$= (-1)^6 \cdot \omega^2 + (-1)^3 \cdot \omega + 1$

$= \omega^2 - \omega + 1 = 0$

(2) $\omega^{101} + \bar{\omega}^{101} - \omega^{11}\bar{\omega} - \omega\bar{\omega}^{11}$

$= (\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 + (\bar{\omega}^3)^{33} \cdot \bar{\omega}^2 -$

$\omega\bar{\omega} \{ (\omega^3)^3 \cdot \omega + (\bar{\omega}^3)^3 \cdot \bar{\omega} \}$

$= (-1)\omega^2 + (-1)\bar{\omega}^2 - \{ (-1)\omega + (-1)\bar{\omega} \}$

$= -(\omega^2 - \omega) - (\bar{\omega}^2 - \bar{\omega})$

$= -(-1) - (-1) = 2$

6. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180

② -180

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에

$(x + 1)$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

7. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

8. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ ω

⑤ $-\omega$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\Rightarrow (\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$$

$$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + \omega = -1$$

9. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때, $x^{100} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{100}}$ 의 값은?

① 1

② -2

③ 0

④ -1

⑤ 2

해설

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = x \cdot x^{99} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x \cdot x^{99}}$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= -1 + \frac{x+1}{x^2} (\because x^2 + x = -1)$$

$$= -1 + \frac{-x^2}{x^2} (\because x + 1 = -x^2)$$

$$= -2$$

10. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60

② 65

③ 68

④ 72

⑤ 75

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$$

$$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7b + 22(c^3)^7$$

$$= 21b + 44 \text{ 이 값이 실수이므로}$$

①에서 $b = 1$ 이다.

$$\therefore 21b + 44 = 65$$

11. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $(\omega^2 + 1)^5 + (\omega - 1)^{100}$ 을 간단히 하면?

① 1

② ω

③ $-\omega$

④ 2ω

⑤ 0

해설

$$x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\omega^3 + 1 = 0, \omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$\omega^2 + 1 = \omega, \omega^6 = 1, \omega - 1 = \omega^2$$

$$(\text{준 식}) = \omega^5 + (\omega^2)^{100} = \omega^5 + \omega^{200}$$

$$= \omega^3 \cdot \omega^2 + (\omega^6)^{33} \cdot \omega^2$$

$$= -\omega^2 + \omega^2 = 0$$