

1. 이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta = 7$ 이 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은? (단, a 는 실수)

- ① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

해설

$\alpha + \beta = 8, \alpha - \beta = 7$ 이므로

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{1}{4} \{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2\} \\ &= \frac{1}{4}(8^2 - 7^2) \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

2. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 한근이 $1 + \sqrt{5}$ 일 때, a 의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

다른 한 근을 α 라 하면

두 근의 곱은 $(1 + \sqrt{5})\alpha = 4$

따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $(1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$

$\therefore a = 2\sqrt{5}$

3. x 에 관한 이차방정식 $3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=4-m^2$ 의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 실수 m 의 값은?

① 5 ② 2 ③ -5 ④ -2 ⑤ 1

해설

$$3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + m^2 + 3m - 4 = 0 \text{의}$$

두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{3}(m^2 - 3m - 10) = 0,$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}(m^2 + 3m - 4) < 0$$

$$(m-5)(m+2) = 0 \quad \therefore m = 5, -2$$

$$(m+4)(m-1) < 0 \quad \therefore -4 < m < 1$$

$$\therefore m = -2$$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$ 의 두 근 a, b 에 대하여 $|a-b|=1$ 이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$ 의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$

② $2+\sqrt{3}$

③ $2-\sqrt{3}$

④ $1+\sqrt{2}$

⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$$x^2+mx+6=0 \text{의 두 근이 } a, b$$

$$a+b=-m, ab=6$$

$$|a-b|=1$$

$$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$$

$$=m^2-24=1$$

$$m^2=25 \therefore m=-5(\because m<0)$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-3)(x-2)=0$$

$$a=3, b=2$$

$$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$$

5. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

두 근의 합 $= -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$

$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

6. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$ 을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}, 1$ 을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.

갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$ 라 하면

$$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2,$$

$$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5 \text{ 이므로}$$

갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.

같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면

$$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \text{ 으로}$$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 실수배임을 알 수 있다.

b 값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b 값이 일치하므로

$a = 3, c = -5$ 임을 알 수 있고 b 는 -2 임을 알 수 있다.

따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$ 이다.

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (k-3)x + k+2 = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k 의 값의 범위는?

① $k \geq -5 - 2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5 + 2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5 + \sqrt{6}$

④ $k \geq 5 + \sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5 + 2\sqrt{6}$

해설

$$x^2 - (k-3)x + k+2 = 0 \text{에서}$$

$$D = (k-3)^2 - 4(k+2)$$

$$= k^2 - 6k + 9 - 4k - 8$$

$$= k^2 - 10k + 1 \geq 0$$

$$\therefore k \leq 5 - 2\sqrt{6} \text{ 또는 } k \geq 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{두 근의 합 } k-3 > 0 \text{이므로 } k > 3$$

$$\text{두 근의 곱 } k+2 > 0 \text{이므로 } k > -2$$

$$\text{따라서 } k \geq 5 + 2\sqrt{6}$$

8. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $a > 0$, $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 두 근은 모두 음이다.
 - ② 음근을 가질 수 없다.
 - ③ 적어도 한 개의 음근을 갖는다.
 - ④ 두 근은 모두 양이다.
 - ⑤ 양근 한 개, 음근 한 개를 갖는다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- (i) $c > 0$ 이면 $\alpha\beta > 0$ 이므로 두 근은 모두 음
- (ii) $c < 0$ 이면 $\alpha\beta < 0$ 이므로 두 근은 양, 음
- (iii) $c = 0$ 이면 $\alpha\beta = 0$ 이므로 두 근은 음, 0

9. 4차방정식 $x^4 + (m + 2)x^2 + m + 5 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m 의 값의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2 = X$ 로 놓으면
 $X^2 + (m + 2)X + m + 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,
준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로
 $\textcircled{1}$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0, \alpha + \beta = -(m+2) > 0, \alpha\beta = m+5 > 0$
이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는
 $-5 < m < -4$

10. x 에 관한 방정식 $x^4 + ax^2 + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$ (a, b 는 실수)이 한 개의 중근(실근)과 두 허근을 갖도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 7

해설

$x^2 = t$ 라 놓으면 $t^2 + at + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$
 x 가 한 개의 중근과 두 허근을 가지려면 t 는 0과 음근 하나를 가져야 한다.
두 근의 합 : $-a < 0 \quad \therefore a > 0$
두 근의 곱 : $a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$
 $(a^2 - 1)^2 + (b - 2)^2 = 0$
 $a^2 = 1, b = 2$
 $\therefore a = 1 (\because a > 0), b = 2$
 $\therefore a + b = 3$