

1. 이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta = 7$ 이 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은? (단, a 는 실수)

- ① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

해설

$$\alpha + \beta = 8, \alpha - \beta = 7 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{1}{4} \{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2\} \\ &= \frac{1}{4}(8^2 - 7^2) \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

2. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 한근이 $1 + \sqrt{5}$ 일 때, a 의 값은?

① $2\sqrt{5}$

② $2\sqrt{3}$

③ 2

④ -2

⑤ 0

해설

다른 한 근을 α 라 하면

$$\text{두 근의 곱은 } (1 + \sqrt{5})\alpha = 4$$

$$\text{따라서 } \alpha = -1 + \sqrt{5}$$

$$\therefore \text{두 근의 합은 } (1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$$

$$\therefore a = 2\sqrt{5}$$

3. x 에 관한 이차방정식 $3(x-1)(x-m) - x(7-m^2) = 4-m^2$ 의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 실수 m 의 값은?

① 5

② 2

③ -5

④ -2

⑤ 1

해설

$3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + m^2 + 3m - 4 = 0$ 의
두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{3}(m^2 - 3m - 10) = 0,$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}(m^2 + 3m - 4) < 0$$

$$(m - 5)(m + 2) = 0 \quad \therefore m = 5, -2$$

$$(m + 4)(m - 1) < 0 \quad \therefore -4 < m < 1$$

$$\therefore m = -2$$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + mx + 6 = 0$ 의 두 근 a, b 에 대하여 $|a - b| = 1$ 이 성립할 때, $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}$ 의 값은? (단, $m < 0$)

① $-1 - \sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 + \sqrt{2}$

⑤ $-2 + \sqrt{5}$

해설

$$x^2 + mx + 6 = 0 \text{의 두 근이 } a, b$$

$$a + b = -m, ab = 6$$

$$|a - b| = 1$$

$$|a - b|^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= m^2 - 24 = 1$$

$$m^2 = 25 \therefore m = -5 (\because m < 0)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

5. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

$$\text{두 근의 곱} = \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

$$\text{두 근의 합} = -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$$

$$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$$

6. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$ 을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}, 1$ 을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

㉠ $\frac{2}{3}$

㉡ $\frac{1}{3}$

㉢ 1

㉣ 2

㉤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.

갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$ 라 하면

$$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2,$$

$$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5 \text{ 이므로}$$

갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.

같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면

$$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \text{ 으로}$$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 실수배임을 알 수 있다.

b 값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b 값이 일치하므로

$a = 3, c = -5$ 임을 알 수 있고 b 는 -2 임을 알 수 있다.

따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$ 이다.

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (k-3)x + k+2 = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k 의 값의 범위는?

① $k \geq -5 - 2\sqrt{6}$

② $k \geq -5 + 2\sqrt{6}$

③ $k \geq -5 + \sqrt{6}$

④ $k \geq 5 + \sqrt{6}$

⑤ $k \geq 5 + 2\sqrt{6}$

해설

$$x^2 - (k-3)x + k+2 = 0 \text{에서}$$

$$D = (k-3)^2 - 4(k+2)$$

$$= k^2 - 6k + 9 - 4k - 8$$

$$= k^2 - 10k + 1 \geq 0$$

$$\therefore k \leq 5 - 2\sqrt{6} \text{ 또는 } k \geq 5 + 2\sqrt{6}$$

두 근의 합 $k-3 > 0$ 이므로 $k > 3$

두 근의 곱 $k+2 > 0$ 이므로 $k > -2$

따라서 $k \geq 5 + 2\sqrt{6}$

8. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $a > 0$, $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때,
다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 두 근은 모두 음이다.
- ② 음근을 가질 수 없다.
- ③ 적어도 한 개의 음근을 갖는다.
- ④ 두 근은 모두 양이다.
- ⑤ 양근 한 개, 음근 한 개를 갖는다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(i) $c > 0$ 이면 $\alpha\beta > 0$ 이므로 두 근은 모두 음

(ii) $c < 0$ 이면 $\alpha\beta < 0$ 이므로 두 근은 양, 음

(iii) $c = 0$ 이면 $\alpha\beta = 0$ 이므로 두 근은 음, 0

9. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m+5 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m 의 값의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$x^2 = X$ 로 놓으면

$X^2 + (m+2)X + m+5 = 0 \dots\dots ①$ 이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,

준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로

①의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0, \alpha + \beta = -(m+2) > 0, \alpha\beta = m+5 > 0$$

이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는

$$-5 < m < -4$$

10. x 에 관한 방정식 $x^4 + ax^2 + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$ (a, b 는 실수)이 한 개의 중근(실근)과 두 허근을 갖도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 7

해설

$$x^2 = t \text{라 놓으면 } t^2 + at + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$$

x 가 한 개의 중근과 두 허근을 가지려면 t 는 0과 음근 하나를 가져야 한다.

$$\text{두 근의 합 : } -a < 0 \quad \therefore a > 0$$

$$\text{두 근의 곱 : } a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$$

$$(a^2 - 1)^2 + (b - 2)^2 = 0$$

$$a^2 = 1, b = 2$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0), b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$