1. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$
$x^2+x+1 = 0$의 한 근 ω
$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2+\omega+1 = 0$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n의 최솟값은 2

2. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^3 = 1$　　② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \overline{\omega}$　　④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$(◯)
② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$(◯)
③ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega + \overline{\omega} = -1$
$\overline{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$
$\therefore \overline{\omega} = \omega^2$(◯)
④ $\omega^2 + \omega = -1$(◯)
⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$(×)

3. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,
$\omega^3=1,\ \ (x-1)(x^2+x+1)=0$
$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도
$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
㉠ $\omega^3=1,\ \ (\omega^3)^2=1\rightarrow$(○)
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1,$
$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$
$\omega^2+\omega+1$을 이용.
$\omega+1=-\omega^2$이므로 $\overline{\omega}=\omega^2\rightarrow$(○)
㉡ 두 근 $\omega,\overline{\omega}$의 합은
$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로
$\omega+\overline{\omega}=-1$
㉣ $\omega^2+\omega+1=0,$
$\omega^2+\omega=-1\rightarrow$(○)

4. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180 ② -180 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에
$(x+1)$을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

5. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65　② 66　③ 67　④ 68　⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1 - \alpha)$를 곱하면
$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$
$1 - \alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n + 1 = 6k(k = 1, 2, 3, \dots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

6. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $1-2w+3w^2-4w^3+3w^4-2w^5$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -4

해설

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω일 때

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로

$1-2\omega+3\omega^2-4\cdot 1+3\omega^3\cdot\omega-2\omega^3\cdot\omega^2$

$=1-2\omega+3\omega^2-4+3\omega-2\omega^2$

$=\omega^2+\omega+1-4=-4$

$\therefore\ -4$

7. 사차방정식 $x^4+x^3-x-1=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^{100}+\dfrac{1}{\beta^{100}}$과 값이 같은 것은?

① $\alpha+1$ ② $\alpha-2$ ③ $\dfrac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^4+x^3-x-1=0$

$x^3(x+1)-(x+1)=0$

$(x+1)(x^3-1)=0$

$\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=0$의 두 근이 α,β

$\therefore \alpha^3=1, \beta^3=1,\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$

$$\begin{aligned}\alpha^{100}+\frac{1}{\beta^{100}} &= (\alpha^3)^{33}\alpha+\frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta} \\ &= \alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{2}{\beta}\end{aligned}$$

8. $x+y=1,\ xy=1$ 인 두 복소수 $x,\ y$에 대하여, $x^{2008}+y^{2008}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ -1　　④ -2　　⑤ 0

해설

$x,\ y$는 $t^2-t+1=0$의 두 허근이므로
$(t+1)(t^2-t+1)=0$
$\therefore\ t^3+1=0$
$\therefore\ t^3=-1$
$x,\ y$는 $t^3+1=0$의 두 허근이므로
$x^3=-1,\ y^3=-1$
$\therefore x^{2008}+y^{2008}=(x^3)^{669}\cdot x+(y^3)^{669}\cdot y$
$=-(x+y)=-1$

9. $x^2 + x + 1 = 0$일 때 $\dfrac{x^{10} + 1}{x^2}$의 값을 구하여라?

① 1　　② 2　　③ 0　　④ −2　　⑤ −1

해설

$x^2 + x + 1 = 0$

$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x^3 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^{10} + 1}{x^2}$

$= \dfrac{(x^3)^3 x + 1}{x^2}$

$= \dfrac{x + 1}{x^2} = \dfrac{-x^2}{x^2}$

$= -1$

$(\because\; x^2 + x + 1 = 0)$

10. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

11. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

12. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$

$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$

13. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3 = 1$,
$x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$
$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$
$= w^2 + w + 1$
$= 0$

14. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $-\frac{w+1}{w^2} + \frac{1+w^2}{w}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ −1 ④ 2 ⑤ −2

해설

$x^3 = 1$,

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

ω는 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 근이 된다.

즉, $\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$-\frac{\omega+1}{\omega^2} + \frac{1+\omega^2}{\omega}$

$= \frac{\omega^2}{\omega^2} + -\frac{\omega}{\omega}$

$= 1 - 1 = 0$

15. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2+\omega+1=0$
㉡ $\omega^2=1$
㉢ $\omega^{99}+\frac{1}{\omega^{99}}=2$
㉣ $\omega^{1005}+\omega^{1004}=-\omega$
㉤ $\omega^{18}+\omega^{99}+\frac{1}{\omega^{99}}=3$

① ㉠, ㉢
② ㉡
③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3-1=0,$
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
$\Rightarrow \omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0,$
$\omega^2=-1-\omega \cdots$ ㉠, ㉡
$\omega^{99}+\frac{1}{\omega^{99}}$
$=(\omega^3)^{33}+\frac{1}{(\omega^3)^{33}}=2\cdots$ ㉢
$\omega^{1005}+\omega^{1004}$
$=(\omega^3)^{335}+(\omega^3)^{334}\times\omega^2$
$=\omega^2+1=-\omega\cdots$ ㉣
$\omega^{18}+\omega^{99}+\frac{1}{\omega^{99}}$
$=(\omega^3)^6+(\omega^3)^{33}+\frac{1}{(\omega^3)^{33}}=3\cdots$ ㉤

16. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5$의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　② 1　③ -1　④ i　⑤ -2

해설

한 근이 α이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0$,
양변에 $\alpha-1$를 곱하면,
$\alpha^3-1=0$, $\therefore\ \alpha^3=1$
$\therefore\ \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$
$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\alpha^2+\alpha+1$
$=0$

17. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ ω　　⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow\; \omega^2 + \omega + 1 = 0,\; \omega^3 = 1$

$\Rightarrow\; (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$

$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$

$= \omega^2 + \omega = -1$

18. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
$x^2 + 2x + 4 = 0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 2} \times \frac{2\overline{\alpha} + 1}{\overline{\alpha} + 2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha + \overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

19. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $w^3 - 1 = 0$　　② $w^2 - w + 1 = 0$

③ $w + \frac{1}{w} = -1$　　④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$

⑤ 다른 허근은 w^2이다.

해설

① $w^3 = 1$이므로 $w^3 - 1 = 0$
② $w^3 - 1 = 0$이므로
$(w-1)(w^2 + w + 1) = 0$
$w - 1 \neq 0$이므로 $w^2 + w + 1 = 0$
$\therefore\ w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$
③ $w^2 + w + 1 = 0$이고
$\omega \neq 0$이므로
양변을 w로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$
$\therefore\ w + \frac{1}{w} = -1$
④ $\omega^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega,$
$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$
$\therefore\ w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$
$(\because w^2 + w + 1 = 0)$
⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$
따라서, w^2은 $x^3 = 1$의 다른 한 허근이다.

20. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^6+\omega^2+\omega+1$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega^3)^2+(\omega^2+\omega+1)=1^2+0=1$

21. $x^3+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$일 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -3

해설

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식
$x^3+1=0$의 세 근이므로
$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=-1$
$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3$