

1. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$

② $2+i$

③ $2+2i$

④ $1-i$

⑤ $2-i$

해설

$z = a + bi$ 라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

$$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$$

$$= (a+b) + (-3a+b)i = 3-5i$$

따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=2, b=1$$

따라서 $z = 2+i$ 이다.

2. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$ 에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i$ 에서

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{이므로 연립하면}$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

3. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$

- ① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$

②

 $z = 2 \pm \sqrt{3}i$

③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
- ④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$

⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$z = a + bi$
 $z + \bar{z} = 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$
 $\therefore a = 2, b = \pm \sqrt{3}$
 $\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$

4. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$

② $-2x+1$

③ 3

④ -3

⑤ $x+1$

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 을 만족하려면,}$$

$a < 0, b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0, x-2 < 0, -1 \leq x < 2, x \neq -1, x \neq 2$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1 - x+2 = 3$$

5. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a \geq 0, b < 0$ ② $a > 0, b > 0$ ③ $a \geq 0, b > 0$
④ $a < 0, b < 0$ ⑤ $a \leq 0, b < 0$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

6. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① I, II

② I, III

③ II, III, IV

④ II, IV

⑤ III, IV

해설

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
 $\therefore$ 옳지 않다.
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
 $\therefore$ 옳다.
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$
 $\therefore$ 옳지 않다.
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
 $\therefore$ 옳다.

7. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① I, II

② I, III

③ II, III, IV

④ II, IV

⑤ III, IV

해설

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
 $\therefore$ 옳지 않다.
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
 $\therefore$ 옳다.
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$
 $\therefore$ 옳지 않다.
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
 $\therefore$ 옳다.

8. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$ 를 계산하면?

① $\sqrt{15}$

② $-\sqrt{15}$

③ $\sqrt{15}i$

④ $-\sqrt{15}i$

⑤ -15

해설

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{5}i = -\sqrt{15}$$

9. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

- ① $x \geq 2$ ② $x \leq 3$ ③ $x \leq 2$
④ $x \geq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2+5x-6} &= -\sqrt{(x-3)(2-x)} \\ &= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x} \text{ 이려면}\end{aligned}$$

$(x-3)(2-x)$ 에서

$$\textcircled{1} \ x-3 \leq 0, \ x \leq 3$$

$$\textcircled{2} \ 2-x \leq 0, \ x \geq 2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시켜야 하므로

$$\therefore 2 \leq x \leq 3$$

10. $\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

- ① ± 1 ② $\pm 2i$ ③ ± 2 ④ $\pm i$ ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z = a - bi \end{cases}$$
$$\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$$
$$\frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + z^2 - z}{z\bar{z}} = i$$
$$\frac{a^2 - 2abi - b^2 + a - bi + a^2 + 2abi - b^2 - a - bi}{a^2 + b^2}$$
$$= i$$
$$\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{-2b}{a^2 + b^2}i = i$$
$$a^2 = b^2, \frac{-2b}{a^2 + b^2} = +1$$
$$\therefore a = \pm 1, b = -1$$
$$z = \pm 1 - i, z^2 = \pm 2i$$

11. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $2z + 3\bar{z} = 5 - 2i$ 를 만족하는 복소수 z 의 역수는?

① $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$
④ $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

② $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$
⑤ $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

③ $-1 - 2i$

해설

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (a, b 는 실수)라 두면

$$2z + 3\bar{z} = 5 - 2i$$

$$2(a + bi) + 3(a - bi) = 5 - 2i$$

$$5a - bi = 5 - 2i$$

복소수 상등에 의하여

$$a = 1, b = 2$$

$$\therefore z = 1 + 2i$$

$$(z \text{의 역수}) = \frac{1}{1 + 2i} = \frac{1 - 2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

12. 다음 등식을 만족하는 실수 x 의 값을 a , y 의 값을 b 라 할 때, $a+2b$ 의 값을 구하여라.

(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

$$\overline{(x+yi)}=\frac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$$

$$x+yi=1+3i$$

$$a=1, \quad b=3$$

$$\therefore a+2b=7$$

13. z 를 입력시키면 zi 가 출력되는 컴퓨터 프로그램이 있다. 어떤 수를 이 프로그램에 입력시켜 나온 결과를 다시 프로그램에 입력시키는 과정을 100번 반복하니 2^{100} 이 나왔다. 처음에 입력된 수는 무엇인가?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2i$ ④ 2 ⑤ 2^{100}

해설

$$\begin{aligned} z &\rightarrow zi \rightarrow zi^2 \rightarrow zi^3 \rightarrow \dots \rightarrow zi^{100} \\ \therefore zi^{100} &= 2^{100} \\ \therefore z &= 2^{100} \end{aligned}$$

14. n 이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ i ④ $-i$ ⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n \\&= i^n + (-i)^n \quad (n \text{은 홀수}) \\&= i^n - i^n = 0\end{aligned}$$

15. $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \\ &= (1 + (-i) + (-1) + i) + (1 + (-i) + (-1) + i) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

16. 정수 n 에 대하여, $z = i^n + \frac{1}{i^n}$ 을 만족하는 실수의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$z = i^n + \frac{1}{i^n} \text{에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } i + \frac{1}{i} = i - i = 0$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } -i + \frac{1}{-i} = 0$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } 1 + \frac{1}{1} = 2$$

따라서, $z = -2, 0, 2$ 이므로 3개이다.

17. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{29} + i^{30}$ 을 계산하면?

- ① $i - 1$ ② $1 - 2i$ ③ $3i - 1$ ④ $2 - 3i$ ⑤ $i + 3$

해설

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + i^4 &= i - 1 - i + 1 = 0 \\ i^{4k} &= 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i \\ \therefore i + i^2 + i^3 + \dots + i^{29} + i^{30} &= i^{29} + i^{30} \\ &= i + i^2 \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

18. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$ 을 간단히 하면?

① 1

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -4

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 &= i & \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 &= -i \\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{200} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{200} &= i^{100} + (-i)^{100} \\ &= (i^4)^{25} + ((-i)^4)^{25} \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

19. $A = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2005}$ 의 값은?

- ① $-i$ ② 1 ③ 0 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$$A = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^{2005}$$

$$= 1 + (-i) + (-1) + i + 1 + \cdots + (-i)$$

$$= 1 - i$$

20. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$f(i) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30} = (-i)^{30} = (i^4)^7 i^2$$

$$= -1f(-i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30} = i^{30}$$

$$= (i^4)^7 i^2 = -1$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= f(i) + f(-i) = -1 - 1 = -2$$

21. 허수단위 i 에 대하여 $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$ 을 간단히하면?

① $1 + i$

② $-1 + i$

③ $2i$

④ $2 + i$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 \\ &= i + (-1) + (-i) + 1 + i + (-1) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

22. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i$ 이므로

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

23. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}^{4n} + \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}^{4n} \\&= \left(\frac{1+2i+i^2}{2} \right)^{4n} + \left(\frac{1-2i+i^2}{2} \right)^{4n} \\&= i^{4n} + (-i)^{4n} = 2 \cdot i^{4n} \\&= 2 \cdot (i^4)^n = 2 \cdot 1^n = 2\end{aligned}$$

24. $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{101} = (a+bi)z$ 를 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z^2 = -i, z^4 = -1$
 $z^{101} = (a+bi)z$ 에서 양변을 z 로 나누면
 $z^{100} = a+bi, (z^4)^{25} = (-1)^{25} = a+bi$
 $\therefore a+bi = -1 \Rightarrow a = -1, b = 0$
 $\therefore a^2 + b^2 = 1$

25. 복소수 z 에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$ 은 양의 정수인 z 의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 6개
- ② 7개
- ③ 8개
- ④ 9개
- ⑤ 10개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$

$m = 1, n = 2, z = i - 1$

$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$

$m = 1, n = 4, z = i + 1$

$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i - 1$	0	$i + 1$
2	$-1 + i$	-2	$-1 - i$	0
3	0	$-i - 1$	$-2i$	$-i + 1$
4	$1 + i$	0	$1 - i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$

∴ 9개

26. 다음을 계산하여라.

$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$

▶ 답 :

▷ 정답 : i

해설

$$\begin{aligned} &1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006} \\ &= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots \\ &\quad \cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006}) \\ &= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) \\ &\quad + \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1) \\ &= i \end{aligned}$$

27. 다음 중 그 값이 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{114}$ 의 값과 같은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

- ① $i+i^3+i^5+i^7+i^9+i^{11}$
- ② $i+i^4+i^7+i^{10}+i^{13}+i^{16}$
- ③ $i^2+i^5+i^8+i^{11}+i^{14}+i^{17}$
- ④ $i^3+i^6+i^9+i^{12}+i^{15}+i^{18}$
- ⑤ $\frac{1}{i}+\frac{1^2}{i}+\frac{1^3}{i}+\frac{1^4}{i}+\frac{1^5}{i}+\frac{1^6}{i}$

해설

i^n 의 주기성을 묻는 문제이다.
 $i=i, i^2=-1, i^3=i^2i=-i, i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$
이므로 곱에 대하여 주기가 4인 규칙을 지닌다.
(준식) $= (i+i^2+i^3+i^4) + (i^5+i^6+i^7+i^8) + \cdots + (i^{109}+i^{110}+i^{111}+i^{112}) + i^{113}+i^{114}$
 $= (i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \cdots + (i-1-i+1) + i-1$
 $= i-1$
① (준식) $= (i-i+i-i) + i-i = 0$
② (준식) $= (i+1-i-1) + i+1 = i+1$
③ (준식) $= (-1+i+1-i) - 1+i = -1+i$
④ (준식) $= (-i-1+i+1) - i-1 = -i-1$
⑤ (준식) $= (-i-1+i+1) - i-1 = -i-1$

28. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ 2
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ (x, y 는 실수)로 놓으면 $(x + yi)^2 = \sqrt{5} + i$
 $x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x^2 - y^2 = \sqrt{5}, 2xy = 1$
 $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ 이므로
 $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$
 $x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
 $\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i, \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i$
 $z^2\bar{z}^2 = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6$
 $z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
 $z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

29. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\therefore \bar{w} = \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1$$

30. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$ 를 간단히 하면?

- ① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z} \\ \therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a \end{aligned}$$

31. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z = \frac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면,

$z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① 7
- ② 6
- ③ 5
- ④ 4
- ⑤ 3

해설

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 의 한 근을 } w \text{ 라 하면, 다른 근은 } \bar{w} \text{ 이다.}$$
$$w + \bar{w} = -1, \quad w\bar{w} = 1$$
$$z\bar{z} = \frac{3w+1}{w+1} \cdot \frac{3\bar{w}+1}{\bar{w}+1}$$
$$= \frac{9w\bar{w} + 3(w + \bar{w}) + 1}{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1}$$
$$= 7$$

32. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w = \frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 1, \quad z\bar{z} = 2 \\ w\bar{w} &= \frac{z+1}{3z-2} \times \frac{\bar{z}+1}{3\bar{z}-2} \\ &= \frac{z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1}{9z\bar{z} - 6(z + \bar{z}) + 4} \\ &= \frac{2 + 1 + 1}{18 - 6 + 4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

33. 복소수 $z = 1 - i$ 라고 할 때, $wz + 1 = \bar{w}$ 를 만족하는 복소수 w 의 실수부분을 구하면? (단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$w = a + bi$ 라 하면

$$\begin{aligned}(a + bi)(1 - i) + 1 &= a - ai + bi + b + 1 \\ &= (a + b + 1) - (a - b)i \\ &= a - bi \text{ 에서}\end{aligned}$$

$$a + b + 1 = a, \therefore b + 1 = 0 \text{ 이므로 } b = -1$$

$$a - b = b \text{ 이므로 } a + 1 = -1 \text{ 에서 } a = -2$$

따라서 w 의 실수부분은 -2

34. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99} + \beta^{99}$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을
이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면
 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \beta^2 - \beta + 1 = 0$
두 식에 각각 $\alpha + 1, \beta + 1$ 를 곱하면
 $(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0, (\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1) = 0$
 $\therefore \alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$
 $\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$

해설

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$ 이므로
 α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면
 $x^2 - x + 1 = 0$
 $\therefore (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^3 + 1) = 0$
 $\alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$
 $\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$

35. $z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1 + \sqrt{3}i$

② $2 + \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $2 + 2\sqrt{3}i$

⑤ $3 + 3\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i} \text{ 에서 } z^2 - z + 1 = 0 \therefore z^3 = -1$$

$$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z - 1) + 3z = 1 + 2z$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 이므로 } 1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$$

36. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\frac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$$w^3-1=0 \quad \therefore w^3=1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+1} \\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1} \\ &= \frac{1}{w-1} \\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)} \\ &= \frac{w^2+w-2}{w+2} \\ &= \frac{-3}{w+2} \\ &= -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} = aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{3} \quad \therefore a+b = -1$$

37. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱

해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x$ ($\because x^2 - x + 1 = 0$)

$= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$

$= -x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

38. $x = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 \cdot \bar{x} - x \cdot \overline{x^3}$ 의 값은? (단, $\bar{x}$ 는 x 의 켤레복소수이다.)

① $13i$

② $28\sqrt{3}i$

③ $28i$

④ $56\sqrt{3}i$

⑤ $72i$

해설

$$\begin{aligned} x = 2 + \sqrt{3}i \text{ 에서 } \bar{x} = 2 - \sqrt{3}i \text{ 이므로} \\ x^3 \cdot \bar{x} - x \cdot \overline{x^3} &= x\bar{x}(x^2 - \overline{x^2}) = x\bar{x}(x + \bar{x})(x - \bar{x}) \\ &= 7 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}i = 56\sqrt{3}i \end{aligned}$$

39. $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때, $(w + 2w^2)^2 + (2w + w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}w &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ \therefore w^2 + w + 1 &= 0, \quad w^3 = 1 \\ \therefore (w + 2w^2)^2 + (2w + w^2)^2 & \\ &= (w - 2w - 2)^2 + (2w - w - 1)^2 \\ &= (-w - 2)^2 + (w - 1)^2 \\ &= w^2 + 4w + 4 + w^2 - 2w + 1 \\ &= 2w^2 + 2w + 5 \\ &= 2(w^2 + w + 1) + 3 \\ &= 3\end{aligned}$$