1. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$

$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$

2. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$ ㉡ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

㉢ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$w^2 + w + 1 = 0 \ \cdots$①

$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots$②

㉠ ① 식을 w로 나누면 $w + \dfrac{1}{w} = -1$

㉡ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$

$w + \overline{w} = -1, \ w\overline{w} = 1$

$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$

㉢ $(w+1)(\overline{w}+1)$

$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$\therefore$ ㉠, ㉢ 맞음

3. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x^2+x+1 = 0$의 한 근 ω

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2+\omega+1 = 0$

$f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$

$f(1) = 1+\frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$

$f(2) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2} = 0$

자연수 n의 최솟값은 2

4. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $1-2w+3w^2-4w^3+3w^4-2w^5$의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ -4

해설

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω일 때
$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$이므로
$1-2\omega+3\omega^2-4\cdot 1+3\omega^3\cdot\omega-2\omega^3\cdot\omega^2$
$=1-2\omega+3\omega^2-4+3\omega-2\omega^2$
$=\omega^2+\omega+1-4=-4$
$\therefore\ -4$

5. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $-\frac{w+1}{w^2} + \frac{1+w^2}{w}$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$x^3 = 1$,

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이 된다.

즉, $\omega^3 = 1,\ \ \omega^2+\omega+1=0$

$-\frac{\omega+1}{\omega^2} + \frac{1+\omega^2}{\omega}$

$= \frac{\omega^2}{\omega^2} + -\frac{\omega}{\omega}$

$= 1 - 1 = 0$

6. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω라 할 때, 다음 중 <u>틀린</u> 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega^3 = 1$

③ 1의 세제곱근은 $1,\ \omega,\ \omega^2$으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2 = \overline{\omega}$(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega = -\omega^2$

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\quad \omega^2 + \omega + 1 = 0,\quad \omega^3 = 1 \cdots$①,②

$x = 1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면 $\cdots$③

$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \overline{\omega} \cdots$④

$\omega = -1-\omega^2 \cdots$⑤(거짓)

7. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때,$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1-\alpha)$를 곱하면
$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)(1-\alpha) = 0$,
$1-\alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n+1 = 6k(k = 1, 2, 3, \ldots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

8. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$x^2+2x+4=0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned}\therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4 \times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13\end{aligned}$$

9. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, $\dfrac{w^{102} + w^{101}}{w^{100}} + \dfrac{w^{99}}{w^{101} + w^{100}}$ 을 계산하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^2 + \omega = -1$

$\dfrac{\omega^{102} + \omega^{101}}{\omega^{100}} + \dfrac{\omega^{99}}{\omega^{101} + \omega^{100}}$

$= \dfrac{\omega^2 + \omega}{1} + \dfrac{1}{\omega^2 + \omega}$

$= -1 - 1 = -2$

10. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 하고

$z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 라 할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하면?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$에서

w, $\overline{w}$는 $x^2 + x + 1 = 0$의

두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$

또한, $z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 에서 $\overline{z} = \dfrac{\overline{w} + 1}{2\overline{w} + 1}$ 이므로

$$z\overline{z} = \frac{w+1}{2w+1} \times \frac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$$

$$= \frac{w\overline{w} + (w + \overline{w}) + 1}{4w\overline{w} + 2(w + \overline{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0\ ,\ (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ w^2 + w + 1 = 0\ ,\ w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 라 하자

$$z = \frac{w+1}{2w+1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$

$$z\overline{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$

11. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,$(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1　② ω　③ $-\omega$　④ 2ω　⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$