1. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.
두 근의 합 : 2,
두 근의 곱 : 2
$\therefore \quad a=-2\ ,\quad b=2$

2. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore$ $-5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

3. 이차방정식 $3x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=8-3\times\frac{4}{3}\times2=0$

4. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면

$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+2x+4$

$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$

$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

5. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

6. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3}+3)x + 3 = 0$의 두 근을 a, b라 할 때, $a \times b$의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2 - (3 + 3\sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$

$x^2 - (1 + 3)x + \sqrt{3} = 0$

$(x-1)(x-\sqrt{3}) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = \sqrt{3}$

$\therefore a \times b = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$

7. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2 + x - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 0$

$x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = 1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

8. 이차방정식 $2x^2-10x+6=0$ 의 두 근을 α,β 라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$\alpha+\beta=-\dfrac{(-10)}{2}=5$

$\alpha\beta=\dfrac{6}{2}=3$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5^2-4\cdot3=13$

9. 이차방정식 $x^2+ax+(a-4)=0$의 근의 차가 최소가 되는 실수 a의 값을 구하면?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=a-4$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &= (-a)^2-4(a-4)\\ &= a^2-4a+16=(a-2)^2+12\end{aligned}$$

$\therefore$ 두 근의 차는 $a=2$일 때 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{a^2-4(a-4)}=\sqrt{(a-2)^2+12}$

$\therefore\ a=2$일 때, 두 근의 차가 최소

10. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$　② $x^2-3x+4=0$
③ $x^2+6x+5=0$　④ $x^2+4x+5=0$
⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α,β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

11. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

12. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$
② $x^2+5x+3=0$
③ $x^2+5x+13=0$
④ $x^2+5x-13=0$
⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a를 a',
주현이가 잘못 본 상수항 b를 b' 이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times 3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 -1, -4이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

13. 이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i = \sqrt{-1}$)

① 12　　② 6　　③ −6　　④ −12　　⑤ −18

해설

이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 복소수 $3-ai$ 이므로,
다른 한 근은 켤레근인 $3+ai$ 이다.
두 근의 합은 $(3-ai)+(3+ai)=-2a$ 이므로,
$-2a=6 \quad \therefore\ a=-3$ 이다.
두 근의 곱은 $(3-ai)(3+ai)=3b$ 이므로,
$9+a^2=3b,\ 9+(-3)^2=18=3b \quad \therefore\ b=6$
$\therefore\ ab=-18$

14. x에 관한 다음 이차방정식이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 또 음근의 절댓값이 양근 보다 크기 위한 m의 범위를 구하면?

$(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$

① $-2<m<0$ ② $-3<m<0$ ③ $-2<m<1$
④ $-2<m<2$ ⑤ $-2<m<3$

해설

음근의 절댓값이 양근보다 크기 위한 조건은
$\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$
$\alpha+\beta=\dfrac{4m}{m+3}<0$
$\therefore\ 4m(m+3)<0$
$\therefore\ -3<m<0 \ \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=\dfrac{2m-1}{m+3}<0$
$\therefore\ (2m-1)(m+3)<0$
$\therefore\ -3<m<\dfrac{1}{2} \ \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 동시에 만족하는 m의 범위는
$-3<m<0$

15. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3
④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢
$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$
$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣
㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$
$\therefore\ q = 2$
㉢에 대입하여 정리하면,
$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$
$\therefore\ p = -1,\ 4$

16. 이차항의 계수가 1 인 이차방정식에서 상수항을 1 만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3 만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$ 가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 -7, $\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

17. 실계수의 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2 + 2\beta = 1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
$\alpha = p + qi$ 이면 $\beta = p - qi$ $(q \neq 0)$
$\alpha^2 + 2\beta = 1$ 이므로
$(p+qi)^2 + 2(p-qi) = 1$ 에서
$(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p-1)i = 0$
$\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0,\ 2q(p-1) = 0$
$q \neq 0$이므로
$p = 1,\ q^2 = 2$
$\therefore\ \alpha + \beta = 2p = 2, \quad \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$
$\therefore\ x^2 - 2x + 3 = 0$
$\therefore\ b = -2,\ c = 3$
$\therefore\ b + c = 1$

18. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c, a=-b, c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1, \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$

19. 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n에 대하여 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+(㉮)x+(㉯)=0$이다. ㉮와 ㉯에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0$
$\therefore\ \alpha^3=1,\ \beta^3=1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$
㉠ : $n=3k+1$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\ \cdot\alpha+(\beta^3)^k\ \cdot\beta$
$=\alpha+\beta=-1$
㉡ : $n=3k+2$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\alpha^2+(\beta^3)^k\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1-2=-1$
㉠,㉡에서 n이 3의 배수가 아니면
$\alpha^n+\beta^n=-1, \alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$
따라서 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2+x+1=0\ \therefore$ ㉮ $=1$, ㉯ $=1$

20. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$　　② $-2 < a < -1$　　③ $-1 < a < 2$

④ $a > 2$　　⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$로 놓으면
$t^2 + 2at + a + 2 = 0$이
서로 다른 양근을 가져야 하므로

(i) $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0 \quad \therefore\ a < -1,\ 2 < a$

(ii) $\alpha + \beta = -2a > 0 \quad \therefore a < 0$

(iii) $\alpha\beta = a + 2 > 0 \quad \therefore\ a > -2$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)에서 $-2 < a < -1$