

1. 한 근이 $1 - i$ 인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1 - i$ 이면 다른 한 근은 $1 + i$ 이다.

두 근의 합 : 2,

두 근의 곱 : 2

$\therefore a = -2, b = 2$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{4}{3}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 8 - 3 \times \frac{4}{3} \times 2 = 0$$

4. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

5. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x - 3)(2x + 1)$

② $2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

③ $(x + 3)(2x - 1)$

④ $2 \left(x + 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

⑤ $2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x + 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

해설

$$a = 2, b' = -2, c = 3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

6. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3} + 3)x + 3 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은?

① $-\sqrt{3}$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$ 을 곱하면

$$3x^2 - (3 + 3\sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - (1 + 3)x + \sqrt{3} = 0$$

$$(x - 1)(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore a \times b = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

7. 이차방정식 $(\sqrt{2} + 1)x^2 + x - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2} - 1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 0$$

$$x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$$

$$(x + \sqrt{2})(x - 1)$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

8. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + (a - 4) = 0$ 의 근의 차가 최소가 되는 실수 a 의 값을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = a - 4$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (-a)^2 - 4(a - 4)$$

$$= a^2 - 4a + 16 = (a - 2)^2 + 12$$

$\therefore$ 두 근의 차는 $a = 2$ 일 때 최소

해설

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{ 이므로}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{a^2 - 4(a - 4)} = \sqrt{(a - 2)^2 + 12}$$

$\therefore a = 2$ 일 때, 두 근의 차가 최소

10. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 6x + 4 = 0$

② $x^2 - 3x + 4 = 0$

③ $x^2 + 6x + 5 = 0$

④ $x^2 + 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 5 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

두 근의 합 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + 3 = 6$$

두 근의 곱 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = 4$$

$\therefore$ 방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$

11. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

12. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a 를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b 를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2 - 5x + 3 = 0$

② $x^2 + 5x + 3 = 0$

③ $x^2 + 5x + 13 = 0$

④ $x^2 + 5x - 13 = 0$

⑤ $x^2 + 5x + 15 = 0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a 를 a' ,
주현이가 잘못 본 상수항 b 를 b' 이라 하자.

$x^2 + a'x + b = 0$ 의 두 근이 1, 3이므로

$$b = 1 \times 3 = 3$$

$x^2 + ax + b' = 0$ 의 두 근이 -1, -4이므로

$$-a = (-1) + (-4) = -5$$

$$\therefore a = 5$$

따라서 처음의 이차방정식은 $x^2 + 5x + 3 = 0$

13. 이차방정식 $x^2 + 2ax + 3b = 0$ 의 한 근이 $3 - ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i = \sqrt{-1}$)

① 12

② 6

③ -6

④ -12

⑤ -18

해설

이차방정식 $x^2 + 2ax + 3b = 0$ 의 한 근이 복소수 $3 - ai$ 이므로,
다른 한 근은 켈레근인 $3 + ai$ 이다.

두 근의 합은 $(3 - ai) + (3 + ai) = -2a$ 이므로,
 $-2a = 6 \quad \therefore a = -3$ 이다.

두 근의 곱은 $(3 - ai)(3 + ai) = 3b$ 이므로,
 $9 + a^2 = 3b, 9 + (-3)^2 = 18 = 3b \quad \therefore b = 6$
 $\therefore ab = -18$

14. x 에 관한 다음 이차방정식이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 또 음근의 절댓값이 양근 보다 크기 위한 m 의 범위를 구하면?

$$(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$$

① $-2 < m < 0$

② $-3 < m < 0$

③ $-2 < m < 1$

④ $-2 < m < 2$

⑤ $-2 < m < 3$

해설

음근의 절댓값이 양근보다 크기 위한 조건은

$$\alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{4m}{m+3} < 0$$

$$\therefore 4m(m+3) < 0$$

$$\therefore -3 < m < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha\beta = \frac{2m-1}{m+3} < 0$$

$$\therefore (2m-1)(m+3) < 0$$

$$\therefore -3 < m < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 m 의 범위는

$$-3 < m < 0$$

15. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자. α^2, β^2 이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$ 의 두 근일 때, p 의 값은?

① -4 또는 1

② -3 또는 2

③ -2 또는 3

④ -1 또는 4

⑤ 2 또는 5

해설

$$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3p, \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\therefore 3p = p^2 - 2q \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$$

$$\therefore 4(q-1) = q^2 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉣} \text{에서 } q^2 - 4q + 4 = 0, (q-2)^2 = 0$$

$$\therefore q = 2$$

㉢에 대입하여 정리하면,

$$p^2 - 3p - 4 = 0, (p+1)(p-4) = 0$$

$$\therefore p = -1, 4$$

16. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면

$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.

$$\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$$

$$\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 α , 2α 가 된다.

$$\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12$, $c = 35$ 이므로

처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } -7, \quad x = 5 \text{ 또는 } 7$$

$$\text{따라서 (두 근의 제곱의 합)} = (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$$

17. 실계수의 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$ 이 허근 α, β 를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$$\alpha = p + qi \text{ 이면 } \beta = p - qi \ (q \neq 0)$$

$$\alpha^2 + 2\beta = 1 \text{ 이므로}$$

$$(p + qi)^2 + 2(p - qi) = 1 \text{ 에서}$$

$$(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p - 1)i = 0$$

$$\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0, \ 2q(p - 1) = 0$$

$$q \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$p = 1, \ q^2 = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2p = 2, \ \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\therefore b = -2, \ c = 3$$

$$\therefore b + c = 1$$

18. x 에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$ 이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β 이므로,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2-bx+c=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{-b+c}{a} = \frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2b=c, a=-b, c=-2a$$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1, \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 1 = 1+6=7 \end{aligned}$$

19. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉠})x + (\textcircled{㉡}) = 0$ 이다. ㉠과 ㉡에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1 - 2 = -1$$

㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면

$$\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$$

따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉠} = 1, \textcircled{㉡} = 1$$

20. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $-2 < a < -1$

③ $-1 < a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2at + a + 2 = 0$$

서로 다른 양근을 가져야 하므로

$$(i) \frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0 \quad \therefore a < -1, 2 < a$$

$$(ii) \alpha + \beta = -2a > 0 \quad \therefore a < 0$$

$$(iii) \alpha\beta = a + 2 > 0 \quad \therefore a > -2$$

$\therefore (i), (ii), (iii)$ 에서 $-2 < a < -1$