1. $x^4-15x^2+10x+24=(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① -5 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

± 상수항의 약수 중에서 $x=-1, 2$을 대입하면 식의 값이 0 이므로
주어진 식은 $x+1, x-2$을 인수로 갖는다.
조립제법으로 나누어 보면,

-1	1	0	-15	10	24
		-1	1	14	-24
2	1	-1	-14	24	0
		2	2	-24	
3	1	1	-12	0	
		3	12		
-4	1	4	0		
		-4			
	1	0			

$x^4-15x^2+10x+24$
$=(x+1)(x-2)(x-3)(x+4)$
$\therefore\ a+b+c+d=1+(-2)+(-3)+4=0$

2. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{4+\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(ⅰ) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$

(ⅱ) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$= \frac{1}{a^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

3. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1)\times$ 몫-3
$x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.
$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

4. 세 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

5. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right) \\ &= 4AB \\ &= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n \\ &= 4 \times 2^n \\ &= 2^{n+2}\end{aligned}$$

6. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

ⅰ), ⅱ)에서 $2+1+3=6$

7. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

8. $x+\frac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6　　② 7, 18　　③ 8, 16
④ 9, 18　　⑤ 10, 27

해설

$x+\frac{1}{x}=3$ 일 때

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$

9. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times 7)$

$=84$

10. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots①$
양변에 $x=2$을 대입하면
$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots②$
①+②에 의해
$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$
$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

11. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

12. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1 > 0)$

$= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

13. $a+b+c=0$일 때, $\frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ac}+\frac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

(준식) $=\frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$

$=\frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

14. 세 양수 a, b, c가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 a, b, c를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$ ($\because a$, b, c는 실수)

따라서 a, b, c를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$a^2=1$

$\therefore a=b=c=1$

$\therefore a+b+c=3$

15. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1} &= \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}\\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}\\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

16. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$ 일 때, $x^4+y^4+z^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx = -2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4 = 8$

17. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots + a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $= \boxed{}\, x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
> 에서 $n=3$, $a_n=1$
> $\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
> $f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
> 이므로 $a_2=0$, $a_1=2$ 즉, $f(x) = x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n ② $2a_n$ ③ na_n ④ $2na_n$ ⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$
$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$
$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\} + a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\} + \cdots$
$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots) + a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\} + \cdots$
$= 2na_nx^{n-1} + \{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$
$\therefore\ 2na_nx^{n-1} = 6x^2$에서
$n-1=2$, $2na_n=6$
$\therefore\ n=3$, $a_n=1$

18. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$\boxed{y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11}　② 2^{12}　③ 2^{13}　④ 3^{11}　⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

19. x에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$를 대입하면, $2^n(4+2a+b)=0$
$\therefore\ b=-2a-4(2^n\neq 0)\cdots$①
①을 준식에 대입하면,
$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
$x^n(x+a+2)=(x-2)p(x)+2^n$
다시 $x=2$를 대입하면,
$2^n(4+a)=2^n\quad\therefore\ a=-3$
$a=-3$을 ①에 대입하면,
$b=(-2)(-3)-4=2$
$\therefore\ a=-3,\ b=2$
$\therefore\ a+b=-1$

20. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_{0+}a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$ ② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$ ③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$
④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$ ⑤ 1

해설

(i) $f(x)=x^{100}=(x+2)Q(x)+R$ 라 하면

$f(-2)=2^{100}=R$

$\therefore\ R=2^{100}$

$f(1)=3Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{3}(1-R)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

(ii) $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{99}x^{99}$

$\therefore\ Q(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{99}$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_{99}=Q(1)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

21. $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ 일 때 $\{P(x)\}^{2007}$ 을 $P(x^2)$ 으로 나눈 나머지는?

① $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $x - 1$

해설

$P(x^2) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)$

$P(x^2)$ 이 이차식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax + b$ 라 하면

$\{P(x)\}^{2007} = \frac{1}{2}(x-1)(x+1)Q(x) + ax + b \cdots$ ㉠

$P(x) = \frac{1}{2}(x-1)$ 에서 $P(1) = 0,\ P(-1) = -1$

㉠에 $x = 1$ 을 대입하면 $a + b = 0$

㉠에 $x = -1$ 을 대입하면 $-a + b = -1$

$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ R(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

22. x^4 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$x^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right) q(x) + r_1$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$r_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right) q(x) = x^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

이때, $a = -\frac{1}{2}$ 로 놓으면 $(x-a)q(x) = x^4 - a^4$

$$\begin{aligned} \therefore\ q(x) &= (x^4-a^4) \div (x-a) \\ &= (x+a)(x^2+a^2) \end{aligned}$$

따라서, $q(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$q(a) = 4a^3$

$$\begin{aligned} \therefore\ q\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

23. $f(x)$는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나누면 나머지는 $x+1$이라고 한다. $f(x)$를 x^2으로 나눌 때, 나머지는?

① $x+\frac{1}{3}$ ② $x+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3}+1$ ④ $\frac{x}{2}+1$ ⑤ $\frac{x}{5}+1$

해설

$f(x)$를 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=x^2Q(x)+ax+b$
$\{f(x)\}^3=\{x^2Q(x)+ax+b\}^3$
이것을 $x^2P(x)+(ax+b)^3$이라 하면
$\{f(x)\}^3$을 x^2으로 나눈 나머지는
$(ax+b)^3$을 x^2으로 나눈 나머지와 같으므로
$(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$에서
$3ab^2x+b^3=x+1$
$\therefore\ 3ab^2=1,\ b^3=1$
$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=1$
$\therefore\ ax+b=\frac{x}{3}+1$

24. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$ 으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$ 으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$ ② $3x^2+2x-5$ ③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$

④ x^2+2x-5 ⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$ 으로 나누어 떨어진다.
$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$
$f(-3)=(-3-3)^2a=4$
$\therefore\ a=\frac{1}{9}$
$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

25. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$　　② $-af(a)+bf(b)$

③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$　　④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$

⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\{f(a)+f(b)\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\{f(a)-f(b)\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$

26. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

27. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.
 i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
 ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
 iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
 iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
 v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$
$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
  &   & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
  &   & 1 & 2 & 3 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
  &   & 1 & 3 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
  &   & 1 & & & \\ \hline
\multicolumn{2}{l}{a = 1} & \boxed{4} = b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$

28. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$　② $2a-2b$　③ $2b-2a$

④ $2b-2c$　⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$ ㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$ ㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$ ㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$ ㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

29. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b=-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0　　② $\sqrt{2}$　　③ $-\sqrt{2}$　　④ 2　　⑤ -2

해설

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$
$=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}$
$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$
$=0$

30. x에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$를 만족한다. 이 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$　　② $xf(x)$
③ $x(x+1)f(x)$　　④ $(x-1)f(x)$
⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$에서
① 다항식 $f(x)$에 대하여 $x = 0, -1$을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$
② 다항식 $g(x)$에 대하여 $x = 1, -1$을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$
③ 다항식 $h(x)$에 대하여 $x = 0, 1$을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$
①, ②, ③으로부터
$f(x), g(x), h(x)$의 최대공약수를 G라 하면
$f(x) = x(x+1)G$, $g(x) = (x-1)(x+1)G$, $h(x) = x(x-1)G$
$\therefore$ $f(x), g(x), h(x)$의 최소공배수는
$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$

31. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3-(a+2)x^2-ax+2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$이므로 $g(x)$는 $x-1$를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x) = (x-1)(2x^2-ax-2a)$
$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$이므로
최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$
 i) $(x-1)(x+1)$ 일 때
$2(-1)^2-a(-1)-2a = 0$에서 $a = 2$
$\therefore\ g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$
 ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때
$2(-1)^2-a(-2)-2a = 0-8 \neq 0$
 i) , ii) 에서
$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$이고 $a = 2$

32. x^2 의 계수가 1인 세 이차식 A, B, C가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 이차식 A는?

㉠ A, B의 최대공약수는 $x+1$이다.
㉡ B, C의 최대공약수는 $x-2$이다.
㉢ A, C의 최소공배수는 x^3+2x^2-5x-6이다.

① x^2+4x+3 ② x^2-x-2 ③ x^2+x-6
④ x^2+5x+6 ⑤ x^2+2x-3

해설

A, B의 최대공약수는 $x+1$ 이므로
$A=a(x+1)$, $B=b(x+1)$
B, C의 최대공약수는 $x-2$ 이므로
$B=(x-2)(x+1)$, $C=c(x-2)$
A, C의 최소공배수는
$x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$
따라서 A, C의 최대공약수는 $(x+3)$ 이고
$A=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$

33. $p(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 정수)가 x^4+6x^2+25와 $3x^4+4x^2+28x+5$의 공약수일 때, $p(1)$은?

① 0　② 1　③ 2　④ 4　⑤ 8

해설

$A=Ga$, $B=Gb$일 때 (a, b는 서로소)
$kA-B=Gka-Gb$ (k는 상수)
$=G(ka-b)$이므로
G는 $kA-B$의 약수이다.
$3(x^4+6x^2+25)-(3x^4+4x^2+28x+5)$
$=14x^2-28x+70$
$=14(x^2-2x+5)$,
$p(x)=x^2-2x+5$
$\therefore\ p(1)=4$