

1. 차가 12인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x , $x + 12$ 라 하면
 $y = x(x + 12)$
 $= x^2 + 12x$
 $x = (x + 6)^2 - 36$
 $x = -6$ 일 때, 최솟값 -36 을 갖는다.
 $x = -6$, $-6 + 12 = 6$
따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

2. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

3. 차가 14 인 두 수의 곱의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -49

해설

두 수를 x , $x + 14$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면 $y = x(x + 14) = x^2 + 14x = (x + 7)^2 - 49$
따라서 $x = -7$ 일 때, 최솟값 -49 를 갖는다.

4. $x^2 + 2y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $4x + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

해설

$$x^2 + 2y^2 = 4 \text{에서 } 2y^2 = 4 - x^2$$

이때, y 는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x - 2)^2 + 8$$

$$(-2 \leq x \leq 2)$$

따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값 $m = -8$ 이고,

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $M = 8$ 이므로 $M + m = 0$

5. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$x^2 - 2x - y = 0 \text{ 에서 } y = x^2 - 2x$$

이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면

$$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 이

두 실근을 가져야 하므로

$$D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) = -3a^2 - 8a - 4 \geq 0$$

$$(3a+2)(a+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots \textcircled{1}$$

근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a + 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2 \text{이므로}$$

$$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1$$

$$= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$$

따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ 에서

$a = -1$ 일 때 최솟값 0,

$a = -2$ 일 때 최댓값 1을 가지므로

최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

7. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10

② 24

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

$$y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + x^2 - 20x + 100$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.