1. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$
$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면
$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$
$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$
$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$
따라서, $G = x-3,\ p = x+3,\ q = x-1$이다.
$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$
$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$
$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$
$\therefore\ a - b + c = 7$

2. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x| \cdot |x^2-1|i \\ &= |x| \cdot |x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x = 0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

3. $a^2 = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha,\ (2-a)^n = \beta$로 놓으면

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

$= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$

$= 4(4-3)^n = 4$

4. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

(우변)$= \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

5. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

6. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 $20\,\mathrm{m}$ 이고 대각선의 길이가 $3\,\mathrm{m}$ 일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m^2 인가?

① $12\,\mathrm{m}^2$ ② $13\,\mathrm{m}^2$ ③ $14\,\mathrm{m}^2$ ④ $15\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $16\,\mathrm{m}^2$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$4(a+b+c) = 20,\ a+b+c = 5$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 3,\ a^2+b^2+c^2 = 9$

$$\begin{aligned}(\text{겉넓이}) &= 2(ab+bc+ca)\\ &= (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\\ &= 25 - 9 = 16(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

7. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ 에서 $3^2 = 7 + 2xy$, $xy = 1$

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ 에서 $x^3 + y^3 = 18$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

8. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9$ ……㉠

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3$ ……㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$

$\therefore$ 나머지는 3

9. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

(준식) $= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2$

$= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2$

$= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2$

$= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2$

$= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)$

따라서 $p = -18,\ g = -4$

$\therefore pg = (-18) \times (-4) = 72$

10. $a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a+b-c-d)(a-b+c+d)$

② $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

③ $(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

④ $(a-b+c-d)(a-b+c+d)$

⑤ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

해설

$a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$
$=(a^2+2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)$
$=(a+c)^2-(b-d)^2$
$=(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

11. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots ㉠$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots ㉡$

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots ㉢$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots ㉣$

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

12. 두 다항식 $x^2+4x+2k$와 x^2+3x+k의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 k값들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 2

해설

$A=x^2+4x+2k$, $B=x^2+3x+k$라고 하면 $A-B=x+k$
$A-B$는 최대공약수 G를 인수로 갖고,
주어진 조건에서 두 식의 최대공약수가 일차식이므로
두 식의 최대공약수는 $x+k$이다.
A, B는 최대공약수 $x+k$를 인수로 가지므로
A에 $x=-k$를 대입하면
$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$
$\therefore\ k=0$ 또는 $k=2$
따라서, k값들의 합은 2이다.

13. 두 다항식 $f(x) = x^3+x^2+ax-3$,$g(x) = x^3-x^2+bx+3$의 최대공약수 $G(x)$가 x의 이차식일 때, ab를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$

$g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$

$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a-b)x - 6$

$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a+b)x$

$= x\{2x^2 + (a+b)\}$

$G(x)$ 는 $f(x) - g(x), f(x) + g(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore\ 2x^2 + (a-b)x - 6 = 2x^2 + (a+b)$

$a - b = 0,\ a + b = -6$

$\therefore\ a = -3, b = -3\ ,\ ab = 9$

14. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

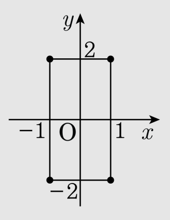
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

15. $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$=(w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$=(-w-2)^2+(w-1)^2$

$=w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$=2w^2+2w+5$

$=2(w^2+w+1)+3$

$=3$

16. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기> 에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1　　㉡ -1　　㉢ i　　㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$

$=1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

17. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R + R'B$ ② $R' + RB$ ③ RR'

④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ + R$ ······㉠

$Q = B'Q' + R'$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A = B(B'Q' + R') + R$

$= (BB')Q' + (R + R'B)$

$R + R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$이어야 한다.

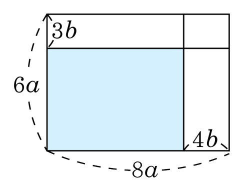
그런데 $R \le B - 1$, $R' \le B' - 1$이므로

$R + R'B \le (B - 1) + (B' - 1)B$

$= BB' - 1 < BB'$

따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R + R'B$이다.

18. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2-7ab+2b^2$

② $36a^2-42ab+12b^2$

③ $48a^2-48ab+12b^2$

④ $12a^2-12ab+3b^2$

⑤ $48a^2+48ab+12b^2$

해설

$(6a-3b)(8a-4b)=48a^2-48ab+12b^2$

19. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c} = \dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형
③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
④ $a=b$인 이등변삼각형
⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c} = \dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서
$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$
$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$
(좌변)
$= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
$= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$
따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$이므로 $a^2 + b^2 = c^2$
그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

20. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1 ② −1 ③ 1997

④ 0 ⑤ −1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

21. 다항식 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$이 성립할 때, $2a - b + 2c - d$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(0) = 1$이므로 $d = 1$

$f(1) = 0$이므로 $a + b + c = -1 \cdots$ ①

$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$에서

$x = -1$을 대입하면 $f(-1) = 0$이므로

$-a + b - c = -1 \cdots$ ②

$x = 0$을 대입하면 $f(2) = -1$이므로

$8a + 4b + 2c = -2 \cdots$ ③

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$\therefore\ a = \frac{1}{3},\ b = -1,\ c = -\frac{1}{3},\ d = 1$

$\therefore\ 2a - b + 2c - d = 0$

22. n이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots$①

$x=-2$를 대입하면,

$4^n(4-2a+b)=0\ \therefore\ b=2a-4\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2+a)$

$\therefore\ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore\ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n\quad\therefore -4+a=1\quad\therefore\ a=5$

②에서 $b=6\quad\therefore\ a-2b=-7$

23. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$에 대하여 $A + 2B$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 100　⑤ 1024

해설

(i) 양변에 $x = 1$을 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots$ ㉡

(ii) ㉠+㉡ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$

$\therefore\ A = 1$

㉠ − ㉡하면

$0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$

$a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore\ B = 0$

$\therefore\ A + 2B = 1$

24. 삼차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(-1) = f(1) = f(2) = 3$일 때 $f(-2)$의 값은?

① -5　② -6　③ -7　④ -8　⑤ -9

해설

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)+3$

$\therefore\ f(-2) = -9$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하면

i) $f(-1) = 3$에서 $a - b + c - 1 = 3$

ii) $f(1) = 3$에서 $a + b + c + 1 = 3$

iii) $f(2) = 3$에서 $4a + 2b + c + 8 = 3$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$a = -2, b = -1, c = 5$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

$\therefore f(-2) = -8 - 8 + 2 + 5 = -9$

25. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 있다.
$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999$, $Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$
두 삼차다항식을 $x^2 - 1$로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$의 값은?

① -3998　　② -1999　　③ 0
④ 1999　　⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$로 놓으면
$H(x)$는 $x^2 - 1$로 나누어떨어지므로
$H(x) = 2x^3 + (a-c)x^2 + (b-d)x + 3998$
$\quad = (x^2 - 1)(2x - 3998)$으로 놓을 수 있다.
($\because$ x^3의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$로 나눈 몫은 $2x - 3998$이다.)
$\therefore P(1999) - Q(1999)$
$= H(1999)$
$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$
$= 0$

26. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0 ② 1

③ r_1 ④ $r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n$

⑤ $r_1r_2\cdots\cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)f_2(x)+r_1 \\ &= (x-1)\{(x-1)f_3(x)+r_2\}+r_1 \\ &= (x-1)^2f_3(x)+r_2(x-1)+r_1 \\ &= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x)+r_3\}+r_2(x-1)+r_1 \\ &= (x-1)^3f_4(x)+r_3(x-1)^2+r_2(x-1)+r_1 \\ &\quad\vdots \\ &= (x-1)^nf_{n+1}(x)+r_n(x-1)^{n-1}+r_{n-1}(x-1)^{n-2}+\cdots\cdots \\ &\qquad +r_2(x-1)+r_1 \end{aligned}$$

$R(x)=r_n(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots+r_2(x-1)+r_1$

$\therefore\ R(2)=r_n+r_{n-1}+\cdots\cdots+r_2+r_1$

27. 다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$라고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(0)$의 값은?

① 6　　② 8　　③ -2　　④ 1　　⑤ -4

해설

$R(x)$는 삼차 이하의 다항식이므로
$R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)+16\cdots$㉠
$f(x)=(x^2+2x+2)Q_2(x)-11x+2$
$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+(ax+k)(x^2+2x+2)-11x+2$
$=(x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x)+ax+k\}$
$-11x+2\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$f(1)=16=5(a+k)-11+2$
$\therefore\ a+k=5\cdots$㉢
$f(-2)=16=2(-2a+k)+22+2$
$\therefore\ -2a+k=-4\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=3,\ k=2$
따라서
$R(x)=(3x+2)(x^2+2x+2)-11x+2$
$\therefore R(0)=6$

28. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $g(x) = f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지 $R(x)$에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $R(x)$는 0이다.
② $R(x)$는 일차식이다.
③ $R(x)$는 이차식이다.
④ $R(x)$의 상수항은 3이다.
⑤ $R(x)$의 상수항은 2이다.

해설

$f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$ 이고
$g(x) = f(x)Q(x) + R(x)$ 에서
$g(x) = (x-3)(x-1)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
그런데 $g(x) = f(f(f(x)))$ 이므로
$g(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$
$g(-1) = f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$
$g(3) = f(f(f(3))) = f(f(0)) = f(3) = 0$
$\therefore\ g(1) = a + b + c = 0,\ g(-1) = a - b + c = 0,$
$g(3) = 9a + 3b + c = 0$
$\therefore\ a = b = c = 0$
따라서 $R(x) = ax^2 + bx + c = 0$

29. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리 ② 11자리 ③ 12자리
④ 13자리 ⑤ 14자리

해설

$$10^{20}-4=(10^{10})^2-2^2$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right)$$
$$10^{30}-8=(10^{10})^3-2^3$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

30. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x)=(x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x)=(x-1)g(x)\cdots$①
$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로
$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.
따라서 $g(x)=(x+1)h(x)\cdots$② 로 놓으면
①에서 $f(x)=(x-1)h(x)\cdots$③
②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

31. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + px + q$를 다항식$g(x) = -x^3 + 2x + q$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하고, $g(x)$ 와 $R(x)$가 $x-1$만을 공통인수로 가질 때, $f(-1) + g(2)$의 값을 구하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$에서
$f(x)$ 와 $g(x)$의 최대공약수는 $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 공통인수가 $x-1$ 이므로
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$
$\therefore f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $x-1$이다.
$f(1) = 3 + p + q = 0 \quad \therefore\ p + q = -3$
$g(1) = 1 + q = 0 \quad \therefore\ q = -1 \ \therefore\ p = -2$
$\therefore\ f(x) = x^3+2x^2-2x-1,\ g(x) = -x^3+2x-1 \therefore\ f(-1)+g(2) = 2-5 = -3$

32. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}\\ &= (-i)^{50}+(i)^{50}\\ &= (-i)^{2}+(i)^{2}\\ &= -2\end{aligned}$$

33. $(z-\bar{z})\times i$ 가 음수이고 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 와 $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
④ $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1+i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(z-\bar{z})\times i<0$ 에서 $-2b<0 \therefore b>0$

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$\therefore\ z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z})=0$

$\therefore\ z\bar{z}=1\ (\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$a^2+b^2=1\cdots㉠$

한편, $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로

$$\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}=\frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$\Leftrightarrow\ z^2(1+\bar{z})=\bar{z}^2(1+z)$

$\Leftrightarrow\ (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z})=0$

$\therefore\ z+\bar{z}=-z\bar{z}=-1(\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$2a=-1\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0\ )$

$$\therefore\ z^2=\left(\frac{-1+\ \sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\ \sqrt{3}i}{2}$$

34. 복소수 z의 실수 부분이 음수일 때 $z^2 = 4i$를 만족하는 z에 대하여 $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{4k+1}$ 의 값을 구하면? (단, k는 양의 정수)

① 1　　② -1　　③ i　　④ $-i$　　⑤ $\frac{1}{2}i$

해설

$z = a + bi$ (단, $a,\ b$: 실수)라 하면

$z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = 4i$

$\therefore\ a^2 - b^2 = 0,\ ab = 2\ \rightarrow\ (a+b)(a-b) = 0,\ ab = 2$

i) $a + b = 0$이면 $ab = 2$에서 $-a^2 = 2$

$\therefore\ a = \pm\sqrt{2}i$ (부적합)

ii) $a - b = 0$이면 $ab = 2$에서 $a^2 = 2$

$\therefore\ a = \pm\sqrt{2},\ \ a < 0$이므로

$a = -\sqrt{2}\ \ \therefore\ b = -\sqrt{2}$

$\therefore\ z = a + bi = -\sqrt{2}(1+i),\ \ \bar{z} = -\sqrt{2}(1-i)$

$$\therefore\ \frac{z}{\bar{z}} = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\therefore\ \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{4k+1} = i^{4k+1} = \left(i^{4k}\right)\cdot i = i$$

35. $\sqrt{\dfrac{b+1}{a-1}} = -\dfrac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 을 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{(b-a+2)^2} + \sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{(2+b)^2} = 0$ 을 만족하는 점의 자취 $p(a,\ b)$ 의 기울기를 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ $\dfrac{1}{2}$　　⑤ $-\dfrac{2}{3}$

해설

$\sqrt{\dfrac{b+1}{a-1}} = -\dfrac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 에서

$a-1<0,\ b+1\ge 0 \therefore\ b\ge -1,\ a<1$

$\therefore\ b-a+2 = b+1-(a-1) > 0$

$a-2<0,\ 2-a>0$

$2+b>0$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식}) &= (b-a+2)+(2-a)+(b+2)\\ &= 2b-2a+6\end{aligned}$$

$\therefore\ 2b-2a+6=0$에서 $b=a-3$

$\therefore$ 기울기는 1