1. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$

$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots$①

한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$②

①과 ②에서 $2<x<4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

2. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$의 두 근의 곱은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ ∴ $x>2$ ······㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$······㉡

㉠,㉡에서 $2<x<4$

∴ $a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

3. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 3, 4, x이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 3^2, 4^2, x^2이다. 이 때, 정수 x의 값의 개수는?

① 2 개
② 3 개
③ 4 개
④ 5 개
⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야
하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,
$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$의
6개의 부등식을 만족하는
x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$이고
x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$이다.

4. $n,\ n+5,\ n+8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 n 의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 7

④ 9 ⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서

$n+(n+5)>n+8,\ n>3\cdots\cdots$ ㉠

둔각삼각형일 조건에서 $n^2+(n+5)^2<(n+8)^2$

$n^2-6n-39<0$, $3-\sqrt{48}<n<3+\sqrt{48}\cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 자연수인 n 은

$n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (6 개)

5. 이차방정식 $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$　② $m \le -4$　③ $m \le -2$

④ $m \le 0$　⑤ $m \le 2$

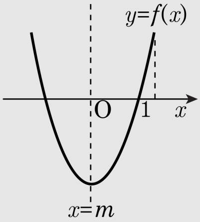
해설

$f(x) = x^2 - 2mx + m + 6 = (x-m)^2 - m^2 + m + 6$으로 놓으면

$\frac{D}{4} = m^2 - 1 \cdot (m+6) = m^2 - m - 6$

$f(1) = 1 - 2m + m + 6 = -m + 7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4} = m^2 - m - 6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ ······ ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1) = -m + 7 > 0$

$\therefore m < 7$ ······ ㉡

(iii) 축 : $m < 1$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

6. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$ ② $-1 \le k \le 2$ ③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$ ⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로
$k^2+k-6 \ge 0$
$(k+3)(k-2) \ge 0$
$\therefore k \le -3, k \ge 2$
(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서
$-k > 1$
$\therefore k < -1$
(iii) $f(1) > 0$ 이므로
$1+2k+6-k > 0$
$\therefore k > -7$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7 < k \le -3$

7. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

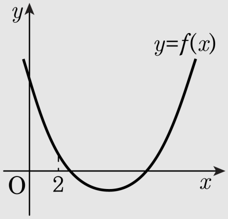
보기

(i) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ii) 2가 두 근 사이에 있다.

① $8 \le m < 10$, $m > 10$　② $8 \le m < 10$, $m > 8$
③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$　④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$
⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

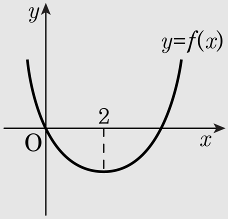
해설

(i) 경계값 $x = 2$ 에서



$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ii)



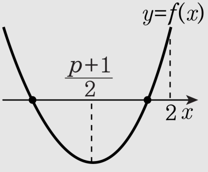
$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$ ② $\frac{1}{2}<p<1$ ③ $1 \le p < 2$
④ $1<p<\frac{4}{3}$ ⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$
$p^2+6p-7>0$, $(p+7)(p-1)>0$
$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$
(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$
$3p<4$
$\therefore p<\frac{4}{3}$
(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로
$\frac{p+1}{2}<2$
$\therefore p<3$
(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$
그런데 $p>0$이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

9. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2사이에 있도록 k값의 범위를 구하면?

① $k < 0$, $k > 1$　② $k \leq 0$, $k \geq 2$　③ $0 < k < 1$

④ $0 \leq k \leq 1$　⑤ $0 < k < 2$

해설

$x^2 - 2x + k = f(x)$라 하면

$f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$

$\therefore k > 0, k < 1$

$\therefore 0 < k < 1$

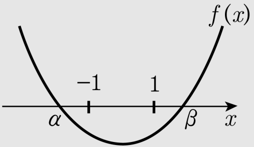
10. 방정식 $x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p의 값의 범위는 ?

① $p>-2$ ② $p>-1$ ③ $p<-2$

④ $p<-1$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면



(i) $f(-1)=p+2<0\quad \therefore p<-2 \cdots$ ①

(ii) $f(1)=3p+2<0\quad \therefore p<-\dfrac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p<-2$

11. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α , β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

ⅰ), ⅱ)의 공통 범위 : $-2<a<2$

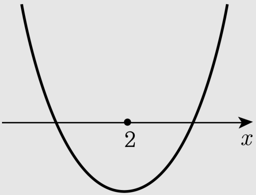
12. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$ ② $m > 1$ ③ $m > -2$

④ $m > 2$ ⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크고 2보다
작은 근을 가지면 $f(2) < 0$
$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$이므로 $m > 3$

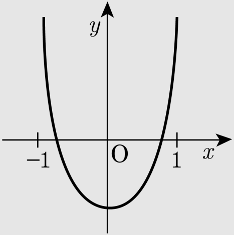


13. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$D/4=k^2-k\ge 0, k(k-1)\ge 0, \therefore k\le 0,\quad k\ge 1$



$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

$f(1)=1+3k>0 \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

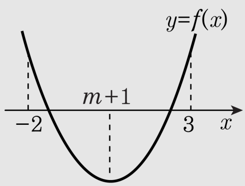
$\therefore\ ab=0$

14. 이차방정식 $x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설



$f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m + 3$ 으로 놓으면

(i) $\frac{\mathrm{D}}{4} = (m+1)^2 - (m+3) \geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2) \geq 0$

$\therefore m \leq -2$ 또는 $m \geq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

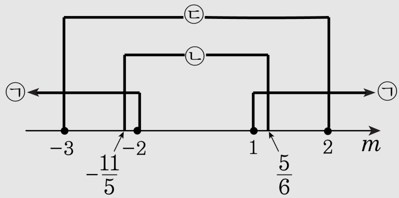
(ii) $f(-2) = 5m + 11 > 0$ 에서

$m > -\frac{11}{5}$,

$f(3) = 6 - 5m > 0$ 에서 $m < \frac{6}{5}$

$\therefore -\frac{11}{5} < m < \frac{6}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



$-2 < m + 1 < 3$

$\therefore -3 < m < 2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{11}{5} < m \leq -2$ 또는 $1 \leq m < \frac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 $-2,\ 1$두 개다.

15. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\dfrac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\dfrac{13}{6}$

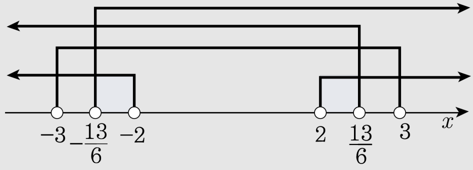
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \dfrac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\dfrac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\dfrac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\dfrac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

16. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

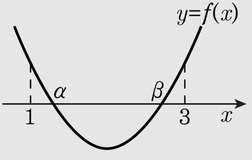
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$

$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

17. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

① $2<p-q<5$　② $3\le p-q<5$　③ $3<p-q\le 6$

④ $5\le p-q\le 6$　⑤ $2\le p-q<6$

해설

$f(x)=x^2+x-p$, $g(x)=x^2-3x-q$ 라 하면 방정식 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x)=x^2+x-p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)-p\le 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)-p>0$$

$$\therefore \frac{3}{4}\le p<\frac{15}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $g(x)=x^2-3x-q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=\frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}-q\ge 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}-q<0$$

$$\therefore -\frac{9}{4}<q\le-\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡에서 $2\le p-q<6$

18. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because$ b는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because$ a는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

19. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $2 < a < \frac{5}{2}$

③ $-2 < a < 4$

④ $-2 < a < \frac{5}{2}$

⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$\mathrm{D} > 0$에서 $\mathrm{D} = a^2 - 4 > 0,\ (a-2)(a+2) > 0$

$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore\ a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore\ \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore\ -2 < a < 4$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

20. 이차방정식 $x^2+ax+2a-3=0$ 의 두 근이 -2, 1 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3}<a\le 2$ ② $-2<a<4$ ③ $-4\le a\le 2$
④ $\frac{2}{3}<a\le 4$ ⑤ $a\ge 6$

해설

$f(x)=x^2+ax+2a-3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 -2 와 1
사이에 있으므로
(i) $D=a^2-4(2a-3)\ge 0$ 에서
$a^2-8a+12\ge 0$, $(a-2)(a-6)\ge 0$
$\therefore\ a\le 2$ 또는 $a\ge 6$
(ii) $f(-2)=4-2a+2a-3>0$ 에서
$1>0$ 이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1)=1+a+2a-3>0$ 에서
$3a>2\quad\therefore\ a>\frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의
방정식이 $x=-\frac{a}{2}$ 이므로
$-2<-\frac{a}{2}<1$
$\therefore\ -2<a<4$
따라서 a 의 값의 범위는 $\frac{2}{3}<a\le 2$