

1. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$ 이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

$$(\text{좌변}) = (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{의 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore a = -3, \text{ 나머지 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

2. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

3. 삼차다항식 $f(x)$ 와 이차다항식 $g(x)$ 가 다음의 세 조건을 만족한다.

- (A) $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누면, 몫이 $x-2$ 이고 나머지가 $x+6$ 이다.
(B) $f(x) - (x-7)g(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.
(C) 방정식 $g(x) = 2x+5$ 의 해는 $-2, 1$ 이다.

이 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x) = (x-2)g(x) + x+6$ 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $f(-1) = -3g(-1) + 5 \cdots \cdots \textcircled{A}$

(B)에서 $f(-1) + 8g(-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 를 연립하면,

$$f(-1) = 8, g(-1) = -1 \cdots \cdots \textcircled{C}$$

(C)에서 $g(x) - (2x+5) = 0$ 의 해가 $-2, 1$ 이므로,

$$g(x) - (2x+5) = a(x+2)(x-1)$$

$$g(x) = a(x+2)(x-1) + 2x+5$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } g(-1) = -2a+3 = -1 \text{이므로 } a = 2$$

$$\therefore g(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-2)g(x) + x+6 \\ &= 2x^3 - 6x + 4 = 2(x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근 중 가장 작은 것은 -2 이다.

4. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + a = 0$

- ① -1
- ② 3
- ③ $-\frac{9}{4}$
- ④ $\frac{9}{16}$
- ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x - 1)^2(x + 3) = 0$. $x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \dots\dots \textcircled{\tiny{㉠}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \dots\dots \textcircled{\tiny{㉡}}$

$\textcircled{\tiny{㉠}}, \textcircled{\tiny{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, b = \frac{9}{4}, ab = -\frac{81}{16}$

5. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3

② -4

③ -5

④ -6

⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면

$$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$$

$$\therefore \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$$

6. 방정식 $x^{11} = 1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1)$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11} - 1 = (x - 1)(x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1)$ 이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ 의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x = -1$ 을 대입하면 $1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1 = (-1 - \alpha_1)(-1 - \alpha_2) \cdots (-1 - \alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{10} + 1) = 1$