

1. 이차다항식 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 라 놓으면

$f(2x) = a(2x - \alpha)(2x - \beta) = 0$

$a\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0, \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0$

$\alpha + \beta = 12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 의 합은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

2. 이차방정식 $x^2 - 3x + 7 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $2\alpha - 1, 2\beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식 중 이차항의 계수가 1인 것은?

① $x^2 + 4x + 10 = 0$

② $x^2 - 4x + 21 = 0$

③ $x^2 - 4x - 21 = 0$

④ $x^2 + 4x + 23 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 23 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 7 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 7$$

이 때, $2\alpha - 1, 2\beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인

이차방정식은

$$x^2 - (2\alpha - 1 + 2\beta - 1)x + (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 0$$

$$x^2 - \{2(\alpha + \beta) - 2\}x + \{4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1\} = 0$$

$$\therefore x^2 - 4x + 23 = 0$$

3. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c\neq 0)$ 의 두 근이 α,β 일 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

$\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
1인 이차방정식은 $x^2+[\text{㉠}]x+\frac{1}{a\beta}=0$
근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\alpha\beta=\frac{c}{a}$
이므로 구하는 방정식은 $x^2+[\text{㉡}]x+\frac{a}{c}=0$
이것을 정리하면 $[\text{㉢}]=0$ 이다.

위의 풀이 과정에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),-\frac{b}{c},cx^2-bx+a$

② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),\frac{b}{c},cx^2+bx+a$

③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),-\frac{b}{c},cx^2-bx+a$

④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),\frac{b}{c},cx^2+bx+a$

⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),\frac{b}{c},cx^2-bx+a$

해설

㉠ 은 $-(\text{두 근의 합})$ 이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\therefore-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right)$
 $-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right)=-\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}\leftarrow\text{㉡}$
 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$
 $cx^2+bx+a=0\leftarrow\text{㉢}$

4. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 4$ 이다. 방정식 $f(4x - 2) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 라 하면

$f(4x - 2) = 0$ 에서 $4x - 2 = \alpha$ 또는 $4x - 2 = \beta$

$$x = \frac{\alpha + 2}{4} \quad \text{또는} \quad x = \frac{\beta + 2}{4}$$

즉, $f(4x - 2) = 0$ 의 두 근은 $\frac{\alpha + 2}{4}, \frac{\beta + 2}{4}$ 이다.

$$\therefore \frac{\alpha + 2}{4} + \frac{\beta + 2}{4} = \frac{\alpha + \beta + 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$