1. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면

$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$

$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0, \left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\alpha+\beta=12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

2. 이차방정식 $x^2-3x+7=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2\alpha-1$, $2\beta-1$을 두 근으로 하는 이차방정식 중 이차항의 계수가 1인 것은?

① $x^2+4x+10=0$ ② $x^2-4x+21=0$

③ $x^2-4x-21=0$ ④ $x^2+4x+23=0$

⑤ $x^2-4x+23=0$

해설

$x^2-3x+7=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=7$

이 때, $2\alpha-1$, $2\beta-1$을 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(2\alpha-1+2\beta-1)x+(2\alpha-1)(2\beta-1)=0$

$x^2-\{2(\alpha+\beta)-2\}x+\{4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1\}=0$

$\therefore\ x^2-4x+23=0$

3. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c\neq 0)$의 두 근이 α,β일 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 x^2+ [(가)]$x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$
> 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
> 이므로 구하는 방정식은 x^2+ [(나)]$x+\frac{a}{c}=0$
> 이것을 정리하면 [(다)]$=0$이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a

해설

(가)는 −(두 근의 합)이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ ∴ $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=-\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}$ ← (나)

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

$cx^2+bx+a=0$ ← (다)

4. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$라 하면

$f(4x-2)=0$에서 $4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉, $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$ 이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$