1. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k - 1 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(ⅰ) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k - 1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0,\ 2k - 1 > 0$

$\therefore k > \frac{1}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

2. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4\geq 0 \quad \therefore t^2\geq 4,\ t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \ge 0$　② $-1 < a < 0$　③ $-2 < a < 0$
④ $a \ge -\frac{1}{3}$　⑤ $0 \le a \le \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \ge 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+7) \ge 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \ge 0$

$6a+2 \ge 0$　$\therefore a \ge -\frac{1}{3}$

4. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot (k-1)\geq 0$

$9+4k-4\geq 0,\ 4k\geq -5$

$\therefore\ k\geq -\frac{5}{4}$

5. x에 관한 이차방정식 $x^2-kx-2k=0$의 두 근을 α,β라 하자. $\alpha^2=6+2\sqrt{5}$ (단, $\alpha>0$) 일 때, 유리수 k의 값은?

① -12　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 12

해설

$x^2-kx-2k=0$의 두 근이 α,β
$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=-2k$
$\alpha^2=6+2\sqrt{5},\ \alpha=\sqrt{5}+1$
한 근이 $1+\sqrt{5}$이면 β는 $1-\sqrt{5}$
$\therefore\ \alpha+\beta=2=k$

6. 이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i=\sqrt{-1}$)

① 12 ② 6 ③ −6 ④ −12 ⑤ −18

해설

이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 복소수 $3-ai$ 이므로,
다른 한 근은 켤레근인 $3+ai$ 이다.
두 근의 합은 $(3-ai)+(3+ai)=-2a$ 이므로,
$-2a=6 \quad \therefore\ a=-3$ 이다.
두 근의 곱은 $(3-ai)(3+ai)=3b$ 이므로,
$9+a^2=3b,\ 9+(-3)^2=18=3b \quad \therefore\ b=6$
$\therefore\ ab=-18$

7. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

8. 두 유리수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$일 때, 이차방정식 $bx^2-5x+a=0$의 두 근의 곱은?

① -4　② -1　③ $-\frac{1}{4}$　④ 1　⑤ 4

해설

$x^2+ax+b=0$의 모든 계수가 유리수이고
한 근이 $2-\sqrt{3}$이면
다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에서
$-a=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$,
$b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$
$\therefore a=-4,\ b=1$
따라서 $bx^2-5x+a=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에서
$\frac{a}{b}=\frac{-4}{1}=-4$

9. 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$의 한 근이 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때 p, q를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차 방정식을 구하면?(단, p, q는 유리수)

① $x^2 - x - 6 = 0$

② $x^2 + 2x - 8 = 0$

③ $x^2 - x - 2 = 0$

④ $x^2 - x - 12 = 0$

⑤ $x^2 - 2x - 3 = 0$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$

$\therefore$ $x^2 + px + q = 0$의 두 근은 $-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}$

$-p = (-1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) = -2$

$q = (-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) = -1$

$p = 2, q = -1$이므로 $p + q = 1$, $pq = -2$

$2, -1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2 - x - 2 = 0$

10. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한근이 $3+\sqrt{2}$이므로 켤레근인 $3-\sqrt{2}$도 근이 된다.
이차방정식의 두 근의 합이 $-a$이므로,
$-a=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6 \quad \therefore\ a=-6$
두근의 곱이 b이므로
$b=(3+\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{2})=9-2=7 \quad \therefore\ b=7$
$\therefore\ a+b=-6+7=1$

11. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한근이 ω일 때 $x=\dfrac{2}{\omega+1}$ 가 $x^2+px+q=0$의 근이다. 이 때, 유리수 p, q의 합을 바르게 구한 것은?

① -2　　② 0　　③ 2　　④ 4　　⑤ 8

해설

$x^2+x+1=0$ 의 두 근 : $\omega, \overline{\omega}$

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\cdot\overline{\omega}=1$

$x^2+px+q=0$ 의 두 근 : $\dfrac{2}{\omega+1}, \dfrac{2}{\overline{\omega}+1}$

$$-p=\frac{2}{\omega+1}+\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{2(\omega+\overline{\omega})+4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=2$$

$$q=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=4$$

$p=-2, q=4 \quad \therefore \quad p+q=2$

해설

$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$라 하자.

$$\frac{2}{\omega+1}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}=1-\sqrt{3}i$$

$\therefore$ 다른 한근은 켤레복소수인 $1+\sqrt{3}i$가 된다.

$p=-$(두근의 합)$=-2$, $q=$(두근의 곱)$=4$

$p+q=2$