1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

2. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$
$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$
$\therefore\ a = 2$

3. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$ ② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$

③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$ ④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$ 과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6\ \therefore\ Q(0,\ 6)$

4. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

5. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(3,2)$, $\mathrm{B}(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은?

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $\sqrt{40}$

해설

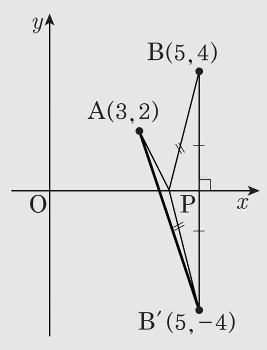
다음 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB}'}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}'}\geq\overline{\mathrm{AB}'}$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}'}$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



6. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답： ____ m

▷ 정답： 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 0)$, $B(5, 4)$에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 4 = 0$ ③ $x + y + 3 = 0$
④ $x - 3y + 4 = 0$ ⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건
$\overline{PA} = \overline{PB}$를 이용하여
$x,\ y$사이의 관계식을 구한다.
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓자.
이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = (x - 5)^2 + (y - 4)^2$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$
$8x + 8y - 40 = 0$
$\therefore x + y - 5 = 0$

8. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$ 에서 같은 거리에 있는 점 P 의 좌표가 $(a,\ b)$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P 는 $(\alpha,\ \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2,\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

9. 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ 으로부터

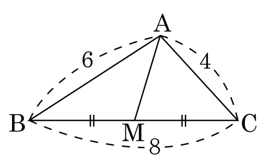
$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots$ ㉡

㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times2=2$

10. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

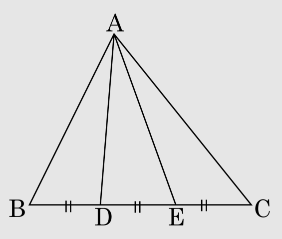
$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$

$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
$\therefore \overline{AM}^2 = 10$

11. $\triangle$ABC의 변 BC 위에 $2\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}$인 점 D를 잡으면 $2\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=m\overline{\mathrm{AD}}^2+n\overline{\mathrm{BD}}^2$이다. 이 때, $m+n$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 9　　⑤ 10

해설



중선정리 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2\right)$

$\overline{\mathrm{DC}}$의 중점을 E라 하면

$\triangle$ABE 에서 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2=2\left(\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2\right)$ $\cdots\cdots$ (가)

$\triangle$ADC 에서

$\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2\right)$ $\cdots\cdots$(나)

2(가)+(나)를 하면

$\overline{\mathrm{AC}}^2+2\overline{\mathrm{AB}}^2=3\overline{\mathrm{AD}}^2+6\overline{\mathrm{BD}}^2$

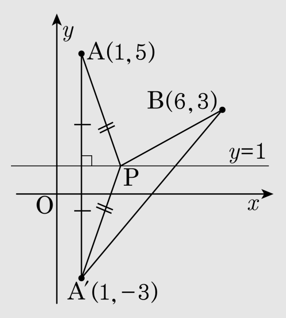
$\therefore m=3\ ,\ n=6$

12. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 5), B(6, 3)이 있다. 점 P가 직선 $y=1$ 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은?

① $\sqrt{41}$ ② 7 ③ $\sqrt{50}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{89}$

해설

점 A의 직선 $y=1$에 대한 대칭점을 A′이라 하면 A′(1, −3)이다.
아래 그림에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA'}}+\overline{\mathrm{PB}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(6-1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{61}$



13. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(2, −1) 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{P}(a, 3)$, $\mathrm{Q}(-2, -2)$, $\mathrm{R}(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{a-2+5}{3}, \dfrac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\dfrac{a+3}{3}=2$ 에서 $a=3$

또 $\dfrac{1+b}{3}=-1$ 에서 $b=-4$

$\therefore\ a+b=-1$

14. $\triangle$ABC 의 무게중심이 $(3,1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 3 : 2 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① (2, 3) ② (1, 3) ③ (3, 2)
④ (2, 2) ⑤ (3, 1)

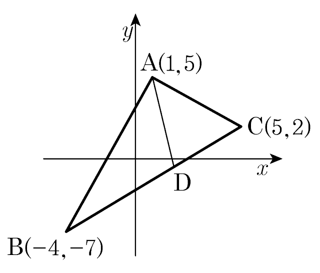
해설

세 점을 $(a,d),(b,e),(c,f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3,1)$ 이므로,
$\dfrac{a+b+c}{3}=3,\ \dfrac{d+e+f}{3}=1 \cdots$ ㉠
변 AB, BC, CA 를 3 : 2 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는
$$\mathrm{P}\left(\frac{2a+3b}{3+2},\frac{2d+3e}{3+2}\right)=\left(\frac{2a+3b}{5},\frac{2d+3e}{5}\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(\frac{2b+3c}{3+2},\frac{2e+3f}{3+2}\right)=\left(\frac{2b+3c}{5},\frac{2e+3f}{5}\right)$$
$$\mathrm{R}\left(\frac{2c+3a}{3+2},\frac{2f+3d}{3+2}\right)=\left(\frac{2c+3a}{5},\frac{2f+3d}{5}\right)$$ 이며,
$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는
$$\left(\frac{5(a+b+c)}{5\cdot 3},\ \frac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$$
$$=\left(\frac{a+b+c}{3},\ \frac{d+e+f}{3}\right)$$
$\therefore$ ㉠에 의해 (3, 1)

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore$ (3, 1)

15. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(−4, −7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$가 있다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?

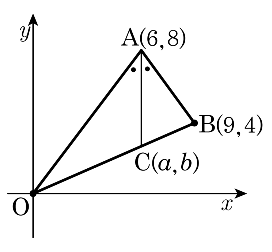


① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$
③ $(2,\ -1)$　④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$
⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB}\ :\ \overline{AC} = \overline{BD}\ :\ \overline{DC}$
$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2+(5+7)^2} = 13$
$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = 5$
$\overline{AB}\ :\ \overline{AC} = \overline{BD}\ :\ \overline{DC} = 13\ :\ 5$
$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

16. 다음 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(6, 8), B(9, 4)를 꼭짓점으로 하는 △AOB가 있다. ∠A 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 C(a, b) 라 할 때, ab 의 값은?



① 12 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 18

해설

$\angle OAC = \angle BAC$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$가 성립한다.
이때, $\overline{AO} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$
$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2+(4-8)^2} = 5$ 이므로
점 C 는 $\overline{OB}$ 를 10 : 5 ,
즉 2 : 1 로 내분하는 점이다.
따라서 점 C 의 좌표는
$C\left(\frac{2\times9+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right)$
$\therefore\ C\left(6,\ \frac{8}{3}\right) \quad \therefore\ ab = 6\cdot\frac{8}{3} = 16$

17. 세 점 $O(0,0), A(3,6), B(6,3)$와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$와 $\triangle OAP$의 높이가 같으므로

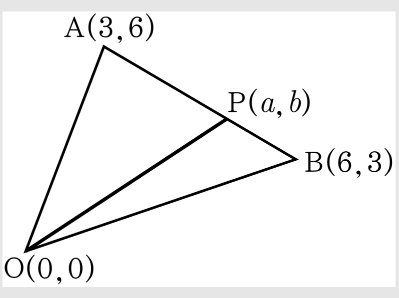
$\triangle OAP = 2\triangle OBP$이려면

P는 두 점 A, B를 2 : 1로 내분하여야 한다.

따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $P(5,4)$이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



18. 직선 $x+y=1$은 두 점, A$(-2,\ 0)$, B$(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① 3 : 2　② 2 : 3　③ 1 : 1　④ 2 : 1　⑤ 1 : 2

해설

선분 AB를 $m\ :\ n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,
점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

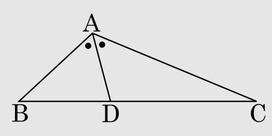
$\therefore\ m:n=1:2$

19. 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(-1,\ \sqrt{3})$, C$(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?

① 1 : 2　　② 1 : 3　　③ 1 : 4　　④ 2 : 3　　⑤ 2 : 5

해설

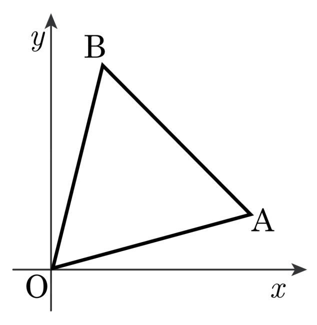
점 D 가 $\angle$A 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로



$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$

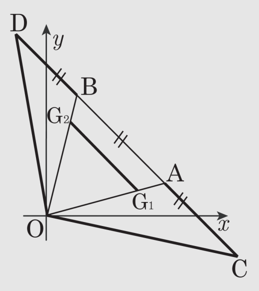
$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$

20. 좌표평면 위에서 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4, 1)$, $\mathrm{B}(1.\ 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에 대하여 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 외분하는 점을 C, 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점을 D 라 하자. 두 삼각형 OCB, OAD 의 무게중심을 각각 G_1, G_2 라 할 때, 선분 $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ 의 길이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

해설



선분 OA 는 삼각형 OCB 의 중선이므로 삼각형 OCB 의 무게중심 G_1 은 선분 OA 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.
마찬가지로 삼각형 OAD 의 무게중심 G_2 는 선분 OB 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.
이때 $\triangle \mathrm{OG}_1\mathrm{G}_2 \backsim \triangle \mathrm{OAB}$ 이고 그 닮음비가 $2 : 3$ 이므로 선분 $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ 의 길이는 선분 AB 의 길이의 $\frac{2}{3}$ 이다.
∴ 구하는 선분의 길이는
$$\frac{2}{3}\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2} = 2\sqrt{2}$$

21. 세 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$과 점 $P(x, y)$가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $P(0, 1)$　② 30, $P(0, 2)$　③ 38, $P(0, 1)$
④ 34, $P(0, 2)$　⑤ 38, $P(0, 2)$

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
$= (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2$
$= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 41$
$= 3x^2 + 3(y-1)^2 + 38$
따라서 최솟값 38, $P(0, 1)$