1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

2. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

3. 두 점 A(–1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, –1), Q(0, 6)

② P(3.6, 0), Q(–1, 6)

③ P(3.6, 0), Q(0, 6)

④ P(2.4, 0), Q(0, 5)

⑤ P(3.6, 0), Q(–1, 2)

해설

A(–1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x, 0) 과 Q(0, y)를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ \mathrm{P}(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \quad \therefore\ \mathrm{Q}(0,\ 6)$

4. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

5. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(3,2)$, $\mathrm{B}(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은?

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $\sqrt{40}$

해설

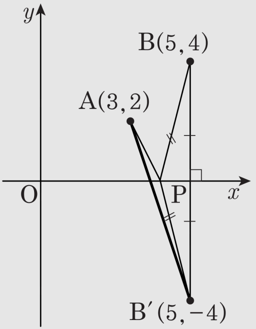
다음 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB}'}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}'}\geq\overline{\mathrm{AB}'}$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}'}$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



6. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ **답 :** ______________ m

▷ **정답 :** 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(1,0), B(5,4)$ 에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$　② $x + 2y + 4 = 0$　③ $x + y + 3 = 0$

④ $x - 3y + 4 = 0$　⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 로 놓고 주어진 조건
$\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 이용하여
$x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.
점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 로 놓자.

이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$

$8x + 8y - 40 = 0$

$\therefore x + y - 5 = 0$

8. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha,\ \alpha - 1)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2,\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

9. 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ 으로부터

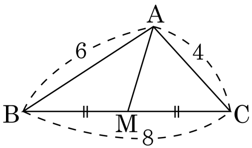
$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots$ ㉡

㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times 2=2$

10. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

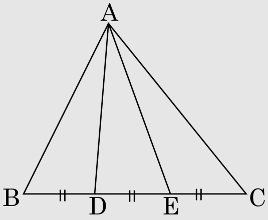
$\therefore \overline{AM}^2=10$

11. $\triangle ABC$의 변 BC 위에 $2\overline{BD}=\overline{DC}$인 점 D를 잡으면 $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=m\overline{AD}^2+n\overline{BD}^2$이다. 이 때, $m+n$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 10

해설

중선정리 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\left(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2\right)$ $\overline{DC}$의 중점을 E라 하면



$\triangle ABE$에서 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2\left(\overline{BD}^2+\overline{AE}^2\right)$ $\cdots\cdots$ (가)

$\triangle ADC$에서

$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\left(\overline{BD}^2+\overline{AE}^2\right)$ $\cdots\cdots$(나)

2(가)+(나)를 하면

$\overline{AC}^2+2\overline{AB}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{BD}^2$

$\therefore m=3$, $n=6$

12. 좌표평면 위에 두 점 A$(1,\ 5)$, B$(6,\ 3)$이 있다. 점 P가 직선 $y=1$ 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은?

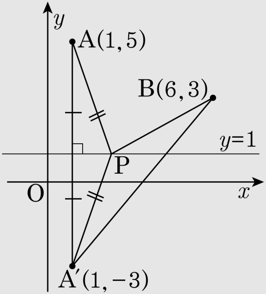
① $\sqrt{41}$ ② 7 ③ $\sqrt{50}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{89}$

해설

점 A의 직선 $y=1$에 대한 대칭점을 A′이라 하면 A′$(1,\ -3)$이다.

아래 그림에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA'}}+\overline{\mathrm{PB}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(6-1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{61}$



13. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G$(2,\ -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 P$(a, 3)$, Q$(-2, -2)$, R$(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{a-2+5}{3}, \dfrac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\dfrac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$
또 $\dfrac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$
$\therefore\ a + b = -1$

14. $\triangle$ABC 의 무게중심이 $(3, 1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R이라 할 때, $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(2,\ 3)$ ② $(1,\ 3)$ ③ $(3,\ 2)$

④ $(2,\ 2)$ ⑤ $(3,\ 1)$

해설

세 점을 $(a, d), (b, e), (c, f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3, 1)$ 이므로,

$$\frac{a+b+c}{3} = 3,\ \frac{d+e+f}{3} = 1 \cdots ㉠$$

변 AB, BC, CA 를 $3 : 2$ 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{2a+3b}{3+2}, \frac{2d+3e}{3+2}\right) = \left(\frac{2a+3b}{5}, \frac{2d+3e}{5}\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2b+3c}{3+2}, \frac{2e+3f}{3+2}\right) = \left(\frac{2b+3c}{5}, \frac{2e+3f}{5}\right)$$

$$\mathrm{R}\left(\frac{2c+3a}{3+2}, \frac{2f+3d}{3+2}\right) = \left(\frac{2c+3a}{5}, \frac{2f+3d}{5}\right)$$ 이며,

$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5(a+b+c)}{5\cdot 3}, \frac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$$

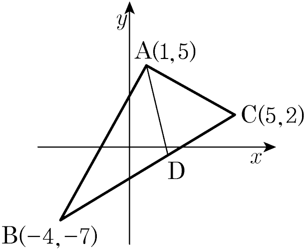
$$= \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}\right)$$

$\therefore$ ㉠에 의해 $(3,\ 1)$

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore (3,\ 1)$

15. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(−4, −7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

③ $(2,\ -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

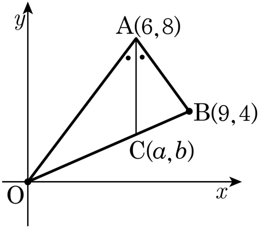
$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2+(5+7)^2} = 13$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$

$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

16. 다음 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 8)$, $\mathrm{B}(9,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle \mathrm{AOB}$가 있다. $\angle \mathrm{A}$ 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?



① 12　　② 14　　③ 15

④ 16　　⑤ 18

해설

$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{BAC}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{CB}}$가 성립한다.

이때, $\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$ 이므로

점 C 는 $\overline{\mathrm{OB}}$ 를 $10 : 5$,

즉 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

따라서 점 C 의 좌표는

$$\mathrm{C}\left(\frac{2\times 9 + 1\times 0}{2+1},\ \frac{2\times 4 + 1\times 0}{2+1}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{C}\left(6,\ \frac{8}{3}\right) \quad \therefore\ ab = 6\cdot\frac{8}{3} = 16$$

17. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$와 $\triangle\mathrm{OAP}$의 높이가 같으므로

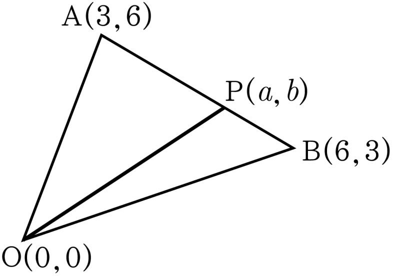
$\triangle\mathrm{OAP} = 2\triangle\mathrm{OBP}$이려면

P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.

따라서 $\mathrm{P}\left(\dfrac{12+3}{3}, \dfrac{6+6}{3}\right)$

즉 $\mathrm{P}(5,4)$이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



18. 직선 $x+y=1$은 두 점, $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① $3:2$ ② $2:3$ ③ $1:1$ ④ $2:1$ ⑤ $1:2$

해설

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,
점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

$\therefore\ m:n=1:2$

19. 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(-1,\ \sqrt{3})$, $C(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

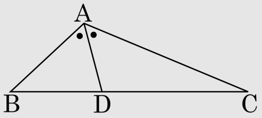
① $1:2$ ② $1:3$ ③ $1:4$ ④ $2:3$ ⑤ $2:5$

해설

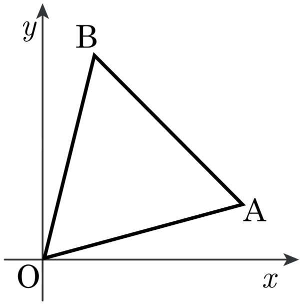
점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2:5$

$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2:5$

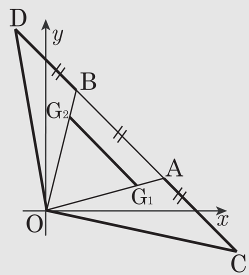


20. 좌표평면 위에서 세 점 O(0, 0), A(4,1), B(1. 4) 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 에 대하여 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 C, 선분 AB 를 2 : 1 로 외분하는 점을 D 라 하자. 두 삼각형 OCB, OAD 의 무게중심을 각각 G_1, G_2 라 할 때, 선분 G_1G_2 의 길이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

해설



선분 OA 는 삼각형 OCB 의 중선이므로 삼각형 OCB 의 무게중심 G_1 은 선분 OA 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
마찬가지로 삼각형 OAD 의 무게중심 G_2 는 선분 OB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
이때 $\triangle OG_1G_2 \backsim \triangle OAB$ 이고 그 닮음비가 2 : 3 이므로 선분 G_1G_2 의 길이는 선분 AB 의 길이의 $\frac{2}{3}$ 이다.

$\therefore$ 구하는 선분의 길이는

$$\frac{2}{3}\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2}=2\sqrt{2}$$

21. 세 점 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$과 점 $P(x, y)$가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$의 최솟값과 그 때의 점 P의 좌표는?

① 30, $P(0, 1)$ ② 30, $P(0, 2)$ ③ 38, $P(0, 1)$
④ 34, $P(0, 2)$ ⑤ 38, $P(0, 2)$

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
$= (x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2$
$= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 41$
$= 3x^2 + 3(y-1)^2 + 38$
따라서 최솟값 38, $P(0, 1)$