1. 함수 $y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 에서
$x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면
$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x+5\right) + 4$
$= -t^2 - 2t + 4 = -(t+1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2,\ M = 1$
$\therefore M + m = -1$

2. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면

$x^2 + ax + a = x + 1$

$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면

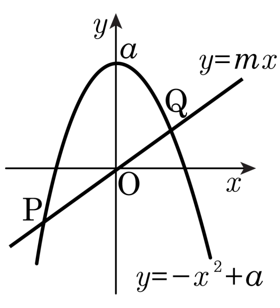
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$

$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$

$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5

따라서 구하는 a의 값은 6

3. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

4. 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 모양이 같고, $x=-1$ 일 때, 최댓값 2 를 갖는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 할 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.(단, a, b, c 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: $a-b+c=2$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$, x^2 의 계수가 1 이므로 이차함수의 식은 $y=(x+1)^2+2$ 이다.
$y=(x+1)^2+2$ 을 전개하면 $y=x^2+2x+3$ 이므로 $a=1$, $b=2$, $c=3$ 이다.
$\therefore a-b+c=1-2+3=2$

5. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y=x^2-2ax+4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x 의 값의 범위에 속하므로
$x=a$ 일 때 최솟값, $x=a+4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4)=(a+4)^2-2a(a+4)+4=4$
$a^2+8a+16-2a^2-8a+4=4$
$a^2=16$
$\therefore a=4\ (a>0)$

6. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x + a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a + 2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

7. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

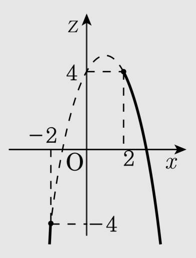
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$

$= -(x-1)^2 + 5$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2,\ x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

8. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\ge 0$

$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\le 0$

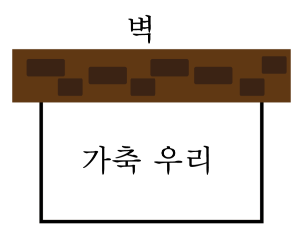
$\rightarrow\ y^2+4y-5\le 0$

$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\le 0$

$\therefore\ -5\le y\le 1$

$\therefore$ y 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

9. 길이가 20m 인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.



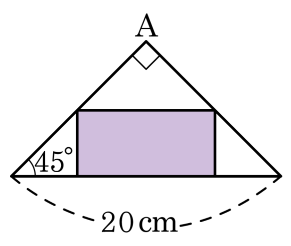
▶ 답 : ______ m^2

▷ 정답 : 50 m^2

해설

가축 우리의 세로의 길이를 x m 라고 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ m 이다.
가축 우리의 넓이를 $y\,m^2$ 라고 하면
$y = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50$
한편, $x > 0$ 이고 $20 - 2x > 0$ 이므로
$0 < x < 10$
따라서 $x = 5$ 일때
가축 우리의 최대 넓이는 $50\,m^2$ 이다.

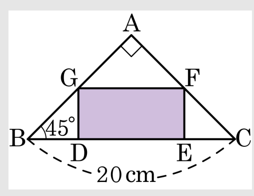
10. 빗변의 길이가 20cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad \text{cm}^2}$

▷ 정답 : 50 $\underline{\text{cm}^2}$

해설

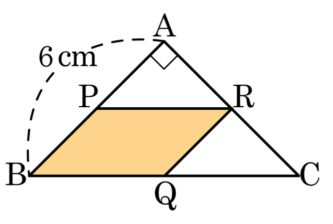


주어진 그림은 직각이등변삼각형이므로
$\overline{BD} = \overline{DG} = \overline{EC} = \overline{EF}$ 이고, $\overline{GD} = x$ 라 하면
$\overline{DE} = 20 - 2x$ 이다. 넓이를 y 로 놓으면

$$\begin{aligned} y &= x(20 - 2x) \\ &= -2x^2 + 20x \\ &= -2(x - 5)^2 + 50 \end{aligned}$$

따라서, 최댓값은 50 이다.

11. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다. □PBQR 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\begin{aligned}□PBQR &= △ABC - (△APR + △RQC) \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left\{\frac{1}{2} \times (6-x)^2 + \frac{1}{2}x^2\right\} \\ &= 18 - (x^2 - 6x + 18) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x-3)^2 + 9\end{aligned}$$

따라서 $\overline{BP} = 3\text{cm}$ 일 때, □PBQR 의 넓이가 최대가 된다.

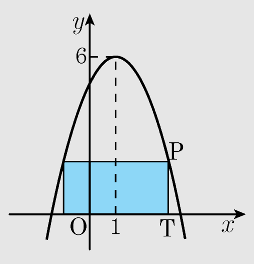
12. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1)-t^2+2t+5] \\ &= 2(-t^2+4t+3) \\ &= -2t^2+8t+6 \\ &= -2(t-2)^2+14\end{aligned}$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.