

1. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$ 의 두 근의 비가 3 : 4일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 2$

해설

두 근을 3α , 4α 라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
 $3\alpha + 4\alpha = 14k \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $7\alpha = 14k \therefore \alpha = 2k \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉡}$ 에서 $12\alpha^2 = 96k \therefore \alpha^2 = 8k \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면 $4k^2 = 8k$, $4k(k - 2) = 0$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
따라서 양수 k 의 값은 $k = 2$ 이다.

2. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로

근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 를 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

3. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서
i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - x + 1 = 9$
 $\therefore x = -4$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - x + 1 = 9$ (성립하지 않음)
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x + x - 1 = 9$
 $\therefore x = 5$
따라서 모든 근의 곱은
 $(-4) \times 5 = -20$

4. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 해는 $x = a$ 또는 $x = p + qi$ 이다. 이 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라. (단, a, p, q 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(-3+i)x + 2(1+i) = 0$

$2x^2 - 2(2+i)x + 2(1+i) = 0$

$x^2 - (2+i)x + 1+i = 0$

$(x-1)\{x-(1+i)\} = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 1+i$

$\therefore a + p + q = 3$

5. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

6. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
 $a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$
 $-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$
 $b = -3, a = 12$
따라서 $a + b = 9$

7. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

8. 이차다항식 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 라 놓으면

$f(2x) = a(2x - \alpha)(2x - \beta) = 0$

$a\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0, \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0$

$\alpha + \beta = 12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 의 합은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

9. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{2})x + (\textcircled{4}) = 0$ 이다. $\textcircled{2}$ 와 $\textcircled{4}$ 에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$
 $\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$
㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,
 $\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$
 $= \alpha + \beta = -1$
㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,
 $\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$
 $= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= 1 - 2 = -1$
㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면
 $\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$
따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{2} = 1, \textcircled{4} = 1$

10. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$2x+1 = \alpha$ 또는 $2x+1 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x = \frac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$

$= \frac{\alpha+\beta-2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$

11. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0 \text{이므로}$$

서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 α , 2α 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, ㉠에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + p+5 = 0$ 의 두근 α, β 가 모두 양의 정수일 때, $\alpha > \beta$ 를 만족하는 순서쌍 (α, β) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = p + 1, \alpha\beta = p + 5$$

$$\therefore \alpha + \beta - 1 = \alpha\beta - 5$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$$

α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha - 1 = 5, \quad \beta - 1 = 1$$

$$\alpha = 6, \beta = 2$$

$\therefore (6, 2)$ 1 개