

1. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$ 의 두 근의 비가 3 : 4일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = 2$

해설

두 근을 3α , 4α 라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여

$$3\alpha + 4\alpha = 14k \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} \text{에서 } 7\alpha = 14k \therefore \alpha = 2k \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 12\alpha^2 = 96k \therefore \alpha^2 = 8k \dots\dots \textcircled{\text{㉣}}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \text{을 } \textcircled{\text{㉣}} \text{에 대입하면 } 4k^2 = 8k, 4k(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 양수 k 의 값은 $k = 2$ 이다.

2. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

3. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - x + 1 = 9$$

$$\therefore x = -4$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - x + 1 = 9 \text{ (성립하지 않음)}$$

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + x - 1 = 9$$

$$\therefore x = 5$$

따라서 모든 근의 곱은

$$(-4) \times 5 = -20$$

4. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 해는 $x = a$ 또는 $x = p + qi$ 이다. 이 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라. (단, a, p, q 는 실수)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(-3+i)x + 2(1+i) = 0$$

$$2x^2 - 2(2+i)x + 2(1+i) = 0$$

$$x^2 - (2+i)x + 1+i = 0$$

$$(x-1)\{x-(1+i)\} = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 1+i$$

$$\therefore a + p + q = 3$$

5. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

ii) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = -3$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

6. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

계수가 모두 실수이므로

다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.

따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서

$$a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$$

$$-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$$

$$b = -3, a = 12$$

따라서 $a + b = 9$

7. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

8. 이차다항식 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 라 놓으면

$f(2x) = a(2x - \alpha)(2x - \beta) = 0$

$$a \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0, \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0$$

$\alpha + \beta = 12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 의 합은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

9. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉠})x + (\textcircled{㉡}) = 0$ 이다. ㉠과 ㉡에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1 - 2 = -1$$

㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면

$$\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$$

따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉠} = 1, \textcircled{㉡} = 1$$

10. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$$2x+1 = \alpha \quad \text{또는} \quad 2x+1 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2} \quad \text{또는} \quad x = \frac{\beta-1}{2}$$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

$$\text{이때 두 근의 합} \quad \frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$$

$$= \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

11. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \text{.....} \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \text{.....} \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \text{.....} \textcircled{㉢}$$

또, $\textcircled{㉠}$ 에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 $\textcircled{㉢}$ 에 의해서 $m = -4$

