1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다 ② $x = 3$

③ $x \neq 3$인 모든실수 ④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, $(\text{실수})^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

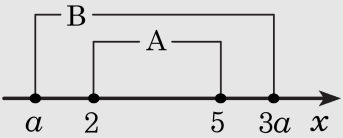
$2 \leq x \leq 5$

$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

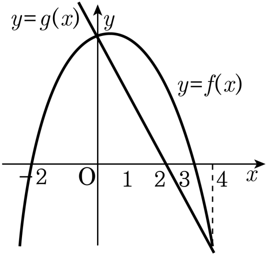
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

3. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$　② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$　④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

4. 부등식 $x^2 - 3|x| - 4 > 0$의 해를 구하면?

① $x < -4$ 또는 $x > 4$　② $x < -1$ 또는 $x > 4$

③ $x < 1$ 또는 $x > -4$　④ $-1 < x < 4$

⑤ $-1 < x < 3$

해설

부등식에 절댓값이 있으므로

(i) $x \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 > 0$

$(x+1)(x-4) > 0$

$x < -1$ 또는 $x > 4$

$x \geq 0$이므로 $x > 4$

(ii) $x < 0$

$x^2 + 3x - 4 > 0$

$(x-1)(x+4) > 0$

$x < -4$ 또는 $x > 1$

$x < 0$이므로 $x < -4$

(i) (ii) 로부터 $x < -4$ 또는 $x > 4$

5. 이차방정식 $f(x) = 0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3) = 0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = 0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha + \beta = 10$

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$로 놓으면

$f(4x-3) = a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta) = 0$

$$x = \frac{3+\alpha}{4},\quad \frac{3+\beta}{4}$$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4} = 4$

6. 이차방정식 $x^2-(2k+4)x+2k^2+9=0$이 실근을 갖도록 k의 값 또는 범위를 정하면?

① $k<2$

② $k \le 2$

③ $k=2$를 제외한 모든 실수

④ $-4 \le k \le 5$

⑤ k의 값은 존재하지 않는다.

해설

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$(k+2)^2-(2k^2+9) \ge 0$

$k^2-4k+5 \le 0$

그런데 $k^2-4k+5=(k-2)^2+1>0$

$\therefore$ k의 값은 존재하지 않는다

7. 둘레의 길이가 24 cm 인 직사각형의 넓이를 35 cm^2 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 15 cm ⑤ 19 cm

해설

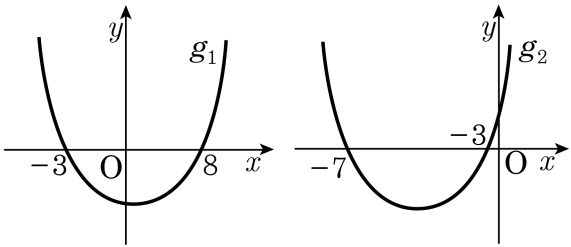
한 변의 길이가 a이므로 다른 한 변의 길이는 $12-a$이다.

$a(12-a) \geq 35$에서 $(a-5)(a-7) \leq 0$

$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 12 cm

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\dfrac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0,\ (x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

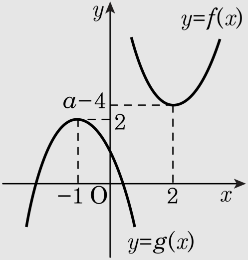
9. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$　② $a > 5$　③ $a > 4$　④ $a > 3$　⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a - 4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로



$a - 4 > 2 \quad \therefore \ a > 6$

10. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$ ② $-2 \le x < 5$ ③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$ ⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x] - 1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\therefore 1 \le x < 5$

11. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\}>0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$ ② $1<k<2$ ③ $1<k<4$

④ $-1<k<3$ ⑤ $-2<k<-1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$k>0\cdots$①

$x^2-(k-2)x-3(k-2)>0$이 항상 성립하려면

$D=(k-2)^2+12(k-2)<0$에서

$(k-2)(k+10)<0$

$\therefore\ -10<k<2\cdots$②

①, ②에서 $0<k<2$

12. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$　　② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$　　④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

13. 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차부등식 $(4a+b+4)x^2+2(a+2)x+1<0$을 풀면? (단, $\alpha>\beta>2$)

① $\dfrac{1}{\beta-2}<x<\dfrac{1}{\alpha-2}$

② $\dfrac{1}{\alpha-2}<x<\dfrac{1}{\beta-2}$

③ $x<\alpha-2,\ x>\beta-2$

④ $x<\beta-2,\ x>\alpha-2$

⑤ $\beta-2<x<\alpha-2$

해설

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=b$이므로

$4a+b+4=-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta+4=(\alpha-2)(\beta-2)$,

$2(a+2)=2a+4=-(\alpha+\beta)+4=-(\alpha+\beta-4)$

따라서, 주어진 이차부등식은

$(\alpha-2)(\beta-2)x^2-(\alpha+\beta-4)x+1<0$

$\therefore\ \{(\alpha-2)x-1\}\{(\beta-2)x-1\}<0$

$\alpha>\beta>2$이므로 $\dfrac{1}{\alpha-2}<x<\dfrac{1}{\beta-2}$