

1. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진

순서쌍 (x, y) 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + 2m$ 의 값을 구하면?

- ① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} \times (-2) + \textcircled{㉡}$ 을 하면
 $-10 < -2x - 10y < -2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢} + \textcircled{㉣} = -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y 는 정수이므로 $y = 0, 1, 2, 3$
이것을 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 대입하여 적합한 x 의 값을 구하면
 $(x, y) = (-3, 1), (-6, 2), (-7, 2), (-11, 3)$
따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,
최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.
 $\therefore M = -2, m = -8 \therefore M + 2m = -18$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x + 5 > 4x - 1 \\ 3 - x \leq 2x + 6 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

정리하면 $x < 3$, $-1 \leq x$
 $x = -1, 0, 1, 2$ 이므로 4개이다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+4 < -2x+7 \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 2개일 때, a 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq a < 0$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-2 \leq a < -1$
 ④ $-2 < a \leq -1$ ⑤ $-3 < a \leq -2$

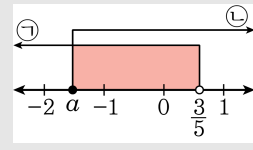
해설

$3x+4 < -2x+7$ 에서

$$x < \frac{3}{5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x \geq a \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분에 정수가 2 개 존재하도록 수직선 위에 나타내면



$$\therefore -2 < a \leq -1$$

4. 연립부등식

$$\begin{cases} x-4 > 3x-8 \\ 2x-a > x+5 \end{cases}$$
가 해를 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $a > -2$

③ $a \leq -3$

④ $a < -3$

⑤ $a > -3$

해설

$$x-4 > 3x-8, 2 > x$$

$$2x-a > x+5, x > a+5$$

해가 존재하기 위해서 $a+5 < 2$

$$\therefore a < -3$$

5. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다)

보기

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $a > b$ 이면 $ac > bc$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $a > b$ 이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $a > b$ 이면 $\frac{c^2}{a} > \frac{c^2}{b}$
- $\textcircled{\text{㉣}}$ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

- $\textcircled{1}$ $\textcircled{\text{㉠}}$
- $\textcircled{2}$ $\textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{3}$ $\textcircled{\text{㉣}}$
- $\textcircled{4}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{5}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉣}}$

해설

$\textcircled{\text{㉠}}$ 의 반례 : $a > b$ 이고 $c = 0$ 인 모든 실수 (거짓)

$\textcircled{\text{㉡}}$. $a > b$ 이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ (참)

$\textcircled{\text{㉢}}$ 의 반례 : $a > b$ 이고 $c = 0$ 인 모든 실수 (거짓)

$\textcircled{\text{㉣}}$. $a > b$ 이고 $|a| < |b|$ 인 모든 실수 (거짓)

6. 부등식 $(a+b)x + (2a-b) > 0$ 의 해가 $x < -1$ 일 때, 부등식 $ax + b > 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x < -\frac{1}{2}$ ② $x < -\frac{1}{3}$ ③ $x > -\frac{1}{2}$
④ $x > -\frac{1}{3}$ ⑤ $x > -1$

해설

$(a+b)x + (2a-b) > 0$ 의 해가 $x < -1$ 이라면

$$a+b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-\frac{2a-b}{a+b} = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

②에서 $a = 2b$ 이고 $a+b = 2b+b = 3b < 0$

$$\therefore b < 0$$

$ax+b > 0$ 에서 $2bx+b > 0$, $2bx > -b$

$$b < 0 \text{이므로 } x < -\frac{1}{2}$$

7. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2(2x-3) > x+3 \\ 5x-9 < 2(3x+7) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 3$

해설

$$\begin{aligned} \text{i) } & 2(2x-3) > x+3 \\ & \Rightarrow 4x-6 > x+3 \\ & \Rightarrow x > 3 \\ \text{ii) } & 5x-9 < 2(3x+7) \\ & \Rightarrow -x < 23 \\ & \Rightarrow x > -23 \\ \therefore & x > 3 \end{aligned}$$

8. 다음 연립부등식 중 해가 없는 것을 모두 고르면?

- ① $\begin{cases} 3x - 2 > -2x + 3 \\ 2(x + 1) \geq 8 \end{cases}$
- ② $\begin{cases} -\frac{x}{2} \leq \frac{1}{4} - x \\ -0.2x - 1 \geq -1.2x - 3 \end{cases}$
- ③ $\begin{cases} 7x - 1 > 4x + 11 \\ 3x - 3 \leq 1 - 2x \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} 2x > 6 \\ -x \geq -3 \end{cases}$
- ⑤ $\begin{cases} 2x - 3x \leq 7 \\ x + 1 > 5 \end{cases}$

해설

- ① $x \geq 3$
- ② $-2 \geq x \leq \frac{1}{2}$
- ③ $x \geq 4$ 또는 $x \leq \frac{4}{5}$ 이므로 해가 없다.
- ④ $x > 3$ 또는 $x \leq 3$ 이므로 해가 없다.
- ⑤ $x > 4$

9. $a < 0$ 이고 $a + b = 0$ 일 때, 부등식 $(a - b)x - a - 2b < 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{2}$

② $x > -\frac{1}{2}$

③ $x > 2$

④ $x < -2$

⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$ 에서 $b = -a$ 를 부등식에 대입하면

$(a + a)x - a + 2a < 0, 2ax + a < 0, 2ax < -a$

$\therefore x > -\frac{1}{2} (\because 2a < 0)$

10. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답: 개

▶ 정답: 2 개

해설

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{3} &\geq \frac{x-2}{2} - x \text{의 양변에 } 6 \text{을 곱하면 } 2(2x+4) \geq 3(x-2)-6x, \\ 4x+8 &\geq 3x-6-6x, \\ x &\geq -2 \\ 0.3(2x-3) &\leq 0.2(x+6)+0.3 \text{의 양변에 } 10 \text{을 곱하면 } 3(2x-3) \leq \\ 2(x+6)+3, \\ 6x-9 &\leq 2x+12+3, \\ x &\leq 6 \\ 1.2x - \frac{1}{2} &< 0.8x + \frac{3}{5} \text{의 양변에 } 10 \text{을 곱하면} \\ 12x - 5 &< 8x + 6, \\ 4x &< 11, \\ x &< \frac{11}{4} \end{aligned}$$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 1, 2의 2개이다.

11. $x + 3y = 5$, $4y + 3z = 6$ 일 때, 부등식 $x < 3y < 5z$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

- ① $\frac{5}{6} < x < \frac{10}{9}$ ② $\frac{30}{29} < x < \frac{5}{3}$ ③ $\frac{55}{29} < x < \frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{2} < x < \frac{90}{29}$ ⑤ $-\frac{90}{29} < x < -\frac{5}{2}$

해설

$x + 3y = 5$ 를 y 에 관하여 풀면

$$y = \frac{5-x}{3}$$

$4y + 3z = 6$ 을 z 에 관하여 풀면

$$z = \frac{6-4y}{3} = 2 - \frac{4}{3}y$$

$y = \frac{5-x}{3}$ 을 대입하면

$$z = 2 - \frac{4}{3} \times \frac{5-x}{3} = 2 - \frac{20-4x}{9} = \frac{4x-2}{9}$$

$y = \frac{5-x}{3}$, $z = \frac{4x-2}{9}$ 를 부등식에 대입하면

$$x < 5-x < 5 \times \frac{4x-2}{9}$$

$$x < 5-x, 2x < 5$$

$$x < \frac{5}{2} \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$5-x < \frac{5(4x-2)}{9}, 45-9x < 20x-10,$$

$$\frac{55}{29} < x \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } \frac{55}{29} < x < \frac{5}{2}$$

12. 부등식 $a+7 \leq ax+b \leq 4b+2a$ 의 해가 $2 \leq x \leq 8$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하면?

① $a = -2, b = -1$

② $a = -1, b = 0$

③ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$

④ $a = \frac{7}{3}, b = \frac{14}{3}$

⑤ $a = 2, b = -1$

해설

$$a+7 \leq ax+b \leq 4b+2a$$

(1) $a > 0$ 일 때,

$$a+7 \leq ax+b, x \geq \frac{a-b+7}{a}$$

$$ax+b \leq 4b+2a, x \leq \frac{3b+2a}{a}$$

$$\frac{a-b+7}{a} \leq x \leq \frac{3b+2a}{a}$$

$$\therefore \frac{a-b+7}{a} = 2, \frac{3b+2a}{a} = 8$$

$$\therefore a = \frac{7}{3}, b = \frac{14}{3}$$

(2) $a < 0$ 일 때

$$\frac{3b+2a}{a} \leq x \leq \frac{a-b+7}{a}$$

$$\therefore \frac{3b+2a}{a} = 2, \frac{a-b+7}{a} = 8$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

($a < 0$ 이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.)