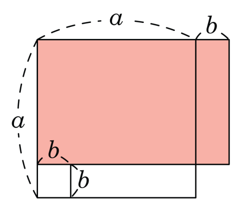
1. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

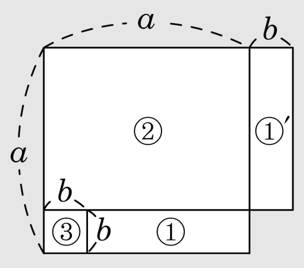
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) =$ ①′ + ②

①′ = ①이므로

$(a+b)(a-b) =$ ① + ② $= a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2) &= Y^2-8Y+12\\ &=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\ &=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

3. 세 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

4. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을
$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$$
\begin{aligned}
&(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)\\
&=(1-zx)(1-xy)(1-yz)\\
&=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2\\
&=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2\\
&=1-1+2\cdot4-4\\
&=4
\end{aligned}
$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$
\begin{aligned}
&(x-a)(x-b)(x-c)\\
&=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc
\end{aligned}
$$

5. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개　② 8 개　③ 12 개　④ 13 개　⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$= (4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

6. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a = 1+2-13-14+24=0,\ b=24$
$\therefore\ a+b=0+24=24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
$x=0$ 대입, $b=24$

7. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
(준식) $= X(X+8)+a$
$= X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

8. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$ 을 간단히 하면?

① 4^8+3^8 ② $4^{15}-3^{15}$ ③ $4^{15}+3^{15}$
④ $4^{16}-3^{16}$ ⑤ $4^{16}+3^{16}$

해설

$(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$
$=(4^8-3^8)(4^8+3^8)$
$=4^{16}-3^{16}$

9. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　　② $2^{32}+1$　　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \quad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

10. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2 개씩 나온다.

$(-2x^3\times b)\times 2+(x^2\times ax)\times 2=(-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

11. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

ⅰ), ⅱ) 에서 $2+1+3=6$

12. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15　② 18　③ 21　④ 26　⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

13. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형

③ 정삼각형 ④ 직각이등변삼각형

⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

14. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

15. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

16. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

17. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

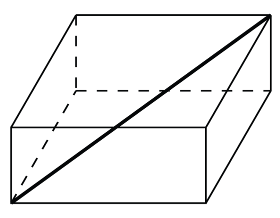
해설

$a^3 + b^3 + c^3$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$
$= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3$
$\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9$

해설

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca\ a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0$
$\frac{1}{2}\left(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right\} = 0$
$\therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1$
$(a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9$

18. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12　② 18　③ 21　④ 23　⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c$는양수$)$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①
①에 각각 대입하면
$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$
$a^3+b^3+c^3=23$

19. $x^2-x+1=0$ 일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^2-x+1=0$, 양변에 $x+1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$x^3+1=0$, $x^3=-1$ 에서 $x^5=x^3\times x^2=-x^2$
$x^5+\frac{1}{x^5}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots$①
$x^2-x+1=0$를 x로 나누어 정리한다.
$x+\frac{1}{x}=1$
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1$
① 에 대입하면, $x^5+\frac{1}{x^5}=1$

20. $x-\frac{1}{x}=1$일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$ ② $\pm 5\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$
④ $\pm 2\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$에서

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$에서

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=5$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5}-3(\pm\sqrt{5})=\pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=3(\pm 2\sqrt{5})-(\pm\sqrt{5})=\pm 5\sqrt{5}$