1. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.　② 정수가 아닌 유리수이다.

③ 정수이다.　④ 홀수인 자연수이다.

⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a(\text{정수})$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= a^2(\text{정수})$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b(\text{정수})$

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

2. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y=ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}$에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x좌표를 구하는 식은

$ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}=x+a$

$ax^2+bx-\frac{b}{2}-a=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}$

교점은 $(\alpha,\ \alpha+a)$, $(\beta,\ \beta+a)$

$\therefore$교점을 이은 선분의 길이를 l이라 하면

$l^2=2(\beta-\alpha)^2=2(\beta+\alpha)^2-8\alpha\beta$

$=2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)+4\right\}$

$=2\left\{\left(\frac{b}{a}+1\right)^2+3\right\}\geq 6$

$\therefore\ l\geq\sqrt{6}$

3. x의 이차방정식 $x^2+(k-2)x+2+k^2+k=0$의 두 실근을 α, β라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ −1　④ 2　⑤ −2

해설

$\alpha+\beta=2-k,\ \alpha\beta=2+k^2+k$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ ············ ㉠

실근 조건에 의해

$D=(k-2)^2-4(2+k+k^2)\geq 0$

$3k^2+8k+4\leq 0 \therefore\ (3k+2)(k+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq k\leq -\frac{2}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$k=-1$일 때 $m=0$

$k=-2$일 때 $M=1$

$\therefore M+m=1$

4. $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 이고, $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 $b,\ c$ 일 때, $b^3 + c^3$ 의 값은 ?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 27 ⑤ 0

해설

a는 $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이므로
$a^3 - 3a + 2 = 0$
$b,\ c$는 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이므로
$b + c = a,\ bc = 1$
$\therefore\ b^3 + c^3 = (b + c)^3 - 3bc(b + c)$
$= a^3 - 3a = -2$

5. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α, β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a, b로 나타내면?

① $-a, \ -b$　② $a, \ b$　③ $-2a, \ -2b$

④ $2a, \ 2b$　⑤ $a, \ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha, \ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a+b+c, \ \alpha\beta=ab$ 이것을

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면

$x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore \ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a, \ b$

6. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β라 하면 $f(\alpha) = \beta + 1$, $f(\beta) = \alpha + 1$을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 1$ $(\alpha \neq \beta)$
$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면
$f(\alpha) = \alpha^2 + a\alpha + b = \beta + 1$
$f(\beta) = \beta^2 + a\beta + b = \alpha + 1$
$f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2 + a(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)$
$\alpha \neq \beta$ 이므로 양변을 $\alpha - \beta$ 로 나누면
$\alpha + \beta + a = -1 \quad \therefore a = -2$ $(\because \alpha + \beta = 1)$
$f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + b = \beta + 1$
$f(\beta) = \beta^2 - 2\beta + b = \alpha + 1$
$f(\alpha) + f(\beta) = \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) + 2b = \alpha + \beta + 2$
$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 2b = \alpha + \beta + 2$
$1 - 2 - 2 + 2b = 3 \quad \therefore b = 3$
$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 3$
$\quad f(1) = 2$

7. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c$, $a=-b$, $c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1$, $\alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$

8. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$　② $(2p+q)^2$　③ $(p-2q)^2$　④ $(p-q)^2$　⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로
주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$
$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$
$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$
그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서
$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$
또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서
$\delta^2+n\delta+p=p-q$
따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$