1. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3+ax^2+b=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.
② 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수이다.
④ 홀수인 자연수이다.
⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-a(\text{정수})$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-b$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= a^2(\text{정수})\end{aligned}$$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-a(a^2-0)-3b=-a^3-3b(\text{정수})$

그러나 $a>0,\ b>0$이면

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

2. 직선 $y = x+a$가 포물선 $y = ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}$에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x좌표를 구하는 식은

$$ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2} = x+a$$

$ax^2+bx-\frac{b}{2}-a = 0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{-\frac{b}{2}-a}{a}$$

교점은 $(\alpha,\ \alpha+a)$, $(\beta,\ \beta+a)$

$\therefore$교점을 이은 선분의 길이를 l이라 하면

$$l^2 = 2(\beta-\alpha)^2 = 2(\beta+\alpha)^2-8\alpha\beta$$

$$= 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)+4\right\}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a}+1\right)^2+3\right\} \geq 6$$

$\therefore\ l \geq \sqrt{6}$

3. x의 이차방정식 $x^2+(k-2)x+2+k^2+k=0$의 두 실근을 α, β라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$\alpha+\beta=2-k,\ \alpha\beta=2+k^2+k$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ .... ㉠

실근 조건에 의해

$D=(k-2)^2-4(2+k+k^2)\geq 0$

$3k^2+8k+4\leq 0 \therefore\ (3k+2)(k+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq k\leq -\dfrac{2}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$k=-1$일 때 $m=0$

$k=-2$일 때 $M=1$

$\therefore M+m=1$

4. $x^3 - 3x + 2 = 0$의 한 근이 a이고, $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 $b,\ c$일 때, $b^3 + c^3$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 27 ⑤ 0

해설

a는 $x^3 - 3x + 2 = 0$의 한 근이므로

$a^3 - 3a + 2 = 0$

$b,\ c$는 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이므로

$b + c = a,\ bc = 1$

$$\begin{aligned} \therefore\ b^3 + c^3 &= (b+c)^3 - 3bc(b+c) \\ &= a^3 - 3a = -2 \end{aligned}$$

5. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α, β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a, b로 나타내면?

① $-a,\ -b$ ② $a,\ b$ ③ $-2a,\ -2b$

④ $2a,\ 2b$ ⑤ $a,\ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a+b+c,\ \alpha\beta=ab$ 이것을

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면

$x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a,\ b$

6. $x^2-x+1=0$ 의 두 근을 α,β라 하면 $f(\alpha)=\beta+1$, $f(\beta)=\alpha+1$을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$ $(\alpha\neq\beta)$

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면

$f(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta+1$

$f(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha+1$

$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$\alpha\neq\beta$ 이므로 양변을 $\alpha-\beta$ 로 나누면

$\alpha+\beta+a=-1$ $\quad\therefore a=-2$ $(\because \alpha+\beta=1)$

$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+b=\beta+1$

$f(\beta)=\beta^2-2\beta+b=\alpha+1$

$f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$

$1-2-2+2b=3$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore f(x)=x^2-2x+3$

$f(1)=2$

7. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α,β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합}: -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱}: -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c,\ a=-b,\ c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1,\ \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7\end{aligned}$$

8. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$

④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로

주어진 식 $=\left\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\right\}\left\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\right\}$

$=\left\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\right\}\left\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\right\}$

$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$

그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서

$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$

또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서

$\delta^2+n\delta+p=p-q$

따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$