

1. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100} - 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2^m + k$ 이다. $m + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 98

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{100} = -1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$x = 2$ 를 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 2^{100} - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}) = 2^{100} - 2$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2^{99} - 1$$

$$\therefore m = 99, k = -1 \text{ 이므로 } m + k = 98$$

2. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2^{24}

④ 2^{25}

⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

3. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28

② 26

③ 15

④ 14

⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{㉠}}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_8 - \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} : 26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$$

4. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} : -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$