1. $x^2-3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$ 라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 11 ⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$

또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+1=0$ 의 근이므로

$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$

$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$=4+6+1=11$

2. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \frac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

3. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$의 값을 구하면?

① 50 ② 40 ③ 10 ④ 30 ⑤ 20

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$

$=(1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\cdots+\{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$

$=(1+4+9+16+25)-(1+2+3+4+5)(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$

$=55-15\times 2-5=55-30-5=20$

4. $x_1^2 - 3x_1 = 7$이고, $x_2^2 - 3x_2 = 7$일 때, $x_1^3 + x_2^3$의 값은?

① 60 ② 66 ③ 72 ④ 84 ⑤ 90

해설

x_1과 x_2는 $x^2 - 3x - 7 = 0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터

$x_1 + x_2 = 3,\ x_1 x_2 = -7$

따라서 $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

$= 3^3 - 3 \cdot (-7) \cdot 3 = 90$

5. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\geq 0,\ 3m^2-2m-5\leq 0,\ (3m-5)(m+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq m\leq \frac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

6. 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 한다. $S_n=\alpha^n+\beta^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n=$(가), $S_4+S_3+S_2=$(나)이다. 이 때, (가), (나)에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

① 0, 1 ② 0, 2 ③ 0, 3 ④ 1, 1 ⑤ 1, 2

해설

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$

$S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n$

$=(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+2(\alpha^n+\beta^n)$

$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+2)+\beta^n(\beta^2+\beta+2)=0$

$(\because \alpha^2+\alpha+2=0,\ \beta^2+\beta+2=0)$

$n=2$를 대입하면 $S_4+S_3+2S_2=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_4+S_3+S_2&=-S_2\\&=-(\alpha^2+\beta^2)\\&=-\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}\\&=-(1-4)=3\end{aligned}$$

7. 정수 a,b에 대하여 삼차방정식 $x^3+ax^2+b=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다. ② 정수가 아닌 유리수이다.

③ 정수이다. ④ 홀수인 자연수이다.

⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-a(\text{정수})$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=-b$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= a^2(\text{정수})\end{aligned}$$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-a(a^2-0)-3b=-a^3-3b(\text{정수})$

그러나 $a>0,\ b>0$이면

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

8. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α, β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a, b로 나타내면?

① $-a,\ -b$　② $a,\ b$　③ $-2a,\ -2b$

④ $2a,\ 2b$　⑤ $a,\ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a+b+c,\ \alpha\beta=ab$ 이것을

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면

$x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a,\ b$

9. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$

10. α는 이차방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$의 근이고 β는 이차방정식 $bx^2 - 2ax + a = 0$의 근이라고 할 때, $\alpha + \dfrac{1}{\beta}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

β 가 방정식 $bx^2 - 2ax + a = 0$ 의 근이므로

$b\beta^2 - 2a\beta + a = 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$ax^2 - 2ax + b = 0$에 $x = \dfrac{1}{\beta}$ 를 대입하면,

㉠에 의해서

$$a\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{\beta}\right) + b = \frac{1}{\beta^2}(b\beta^2 - 2a\beta + a) = 0$$

따라서, $x = \dfrac{1}{\beta}$은 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$의 근이다.

그런데 α도 이 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$의 근이므로 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$의 두 근은 α와 $\dfrac{1}{\beta}$이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha + \dfrac{1}{\beta} = 2$

11. 이차방정식 $x^2+5x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{3}i$ ② $\sqrt{3}i$ ③ $\sqrt{7}i$ ④ $\pm\sqrt{7}i$ ⑤ 0

해설

$D>0$이므로 α, β는 실수

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=1$ $\therefore \alpha<0, \beta<0$

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-7$$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{7}i$

$\sqrt{-\alpha}i+\sqrt{-\beta}i=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})i$ 의 꼴이 되므로 $-\sqrt{7}i$가 구하는 값이 될 수 없다.

12. x에 대한 이차방정식 $(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=0$의 두 근을 α, β라 한다. $ab \neq 0, p \neq q$일 때, $\dfrac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}$의 값을 구하면?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

$(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=(x-\alpha)(x-\beta)$

양변에 x 대신에 p, q를 각각 대입하면

$a(p-q)=(p-\alpha)(p-\beta)$

$b(q-p)=(q-\alpha)(q-\beta)$이므로

$$\frac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}=\frac{a\cdot b(q-p)}{b\cdot a(p-q)}=-1$$