1. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\Rightarrow\omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

2. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$　② $-i$　③ i

④ -1　⑤ 1

해설

$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$

$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$

$= -x^2 - x - 1$ $(\because\ x^2 + 2x + 2 = 0)$

$= -(-2x - 2) - x - 1$

$= x + 1 = i$

3. 복소수 $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면
$4z^2+4z+1=-3$
$\rightarrow 4z^2+4z+4=0$
$\rightarrow z^2+z+1=0$
$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$
$\rightarrow z^3-1=0$
$\rightarrow z^3=1$
※방정식에 익숙한 학생들은
$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$
$= 10z^4+12x^3+10z^2$
$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$
$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$
$= 0+2$
$= 2$

4. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

$z^2 = -2i,\ z^3 = -2 - 2i$

$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$

$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$

$= 5$

해설

$z = 1 - i \quad \Rightarrow \quad z - 1 = -i$

$\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1$

$\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0$

$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$