1. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$
② $-2<a<0,\ a>0$
③ $-2<a<0$
④ $a>2$
⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\dfrac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$

2. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot1\cdot(k-1)\geq0$

$9+4k-4\geq0,\ 4k\geq-5$

$\therefore\ k\geq-\frac{5}{4}$

3. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$x^2+1=tx$

$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로

$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

4. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k - 1 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\dfrac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0,\ \ 2k - 1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

5. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$　② $a\ge 1$　③ $-1<a<1$

④ $a>1$　⑤ $a\ge -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$$

$$1-2+a>0$$

$$\therefore\ a>1$$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k < -2$ ② $-1 < k < 0$ ③ $-1 < k < 4$

④ $k < 5$ ⑤ $0 < k < 5$

해설

$x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = 9 - 2k + 1 > 0 \quad \therefore 2k < 10 \quad \therefore k < 5$$

7. x에 관한 이차방정식 $x^2-kx-2k=0$의 두 근을 α,β라 하자. $\alpha^2=6+2\sqrt{5}$ (단, $\alpha>0$) 일 때, 유리수 k의 값은?

① -12 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 12

해설

$x^2-kx-2k=0$의 두 근이 α,β

$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=-2k$

$\alpha^2=6+2\sqrt{5},\ \alpha=\sqrt{5}+1$

한 근이 $1+\sqrt{5}$이면 β는 $1-\sqrt{5}$

$\therefore\ \alpha+\beta=2=k$

8. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ \ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$이므로 켤레근인 $3 - \sqrt{2}$도 근이 된다.
이차방정식의 두 근의 합이 $-a$이므로,
$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore\ a = -6$
두근의 곱이 b이므로
$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore\ b = 7$
$\therefore\ a + b = -6 + 7 = 1$

10. 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때 p,q를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차 방정식을 구하면?(단, p, q는 유리수)

① $x^2-x-6=0$

② $x^2+2x-8=0$

③ $x^2-x-2=0$

④ $x^2-x-12=0$

⑤ $x^2-2x-3=0$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$

$\therefore$ $x^2+px+q=0$의 두 근은 $-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$

$-p=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

$q=(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=-1$

$p=2, q=-1$이므로 $p+q=1$, $pq=-2$

$2, -1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-x-2=0$

11. 두 유리수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$일 때, 이차방정식 $bx^2-5x+a=0$의 두 근의 곱은?

① -4　② -1　③ $-\frac{1}{4}$　④ 1　⑤ 4

해설

$x^2+ax+b=0$의 모든 계수가 유리수이고
한 근이 $2-\sqrt{3}$이면
다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에서
$-a=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$,
$b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$
$\therefore a=-4,\ b=1$
따라서 $bx^2-5x+a=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에서
$\frac{a}{b}=\frac{-4}{1}=-4$

12. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 직선 $y = bx$가 만나는 두 교점을 P, Q라 한다. 점 P의 x좌표가 $2+\sqrt{3}$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ y = bx \end{cases}$$

$bx = x^2 - a$ $\therefore$ P, Q의 x좌표는 $x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.

점 P의 x좌표가 $2+\sqrt{3}$이므로,

켤레근인 $2-\sqrt{3}$은 점 Q의 x좌표이다.

근과 계수와의 관계에 의해서

$b = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

$-a = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$ $\therefore$ $a = -1$

$\therefore$ $a + b = (-1) + 4 = 3$