

1. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-4)=3, -2x=-5$
 $\therefore x=\frac{5}{2}$

ii) $3 \leq x < 4$ 일 때
 $(x-3)-(x-4)=2, 0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.

iii) $x \geq 4$ 일 때
 $x-3+x-4=2, 2x=9$
 $\therefore x=\frac{9}{2}$

따라서 $x=\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

2. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의해} \\ & \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3 \\ & (\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta) \\ & = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta \\ & = (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta \\ & = 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9 \end{aligned}$$

3. m 은 양의 정수이고, x 에 관한 이차방정식 $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + m\sqrt{2} - 4 = 0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α 라 하자
 $\alpha^2 - (3 + \sqrt{2})\alpha + m\sqrt{2} - 4 = 0$
 $(m - \alpha)\sqrt{2} + \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $m = \alpha$ 그리고 $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0$
 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = 4$
 m 이 양의 정수이므로 $\alpha = 4$ 에서 $m = 4$

4. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 해는 $x = a$ 또는 $x = p + qi$ 이다. 이 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라. (단, a, p, q 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(-3+i)x + 2(1+i) = 0$

$2x^2 - 2(2+i)x + 2(1+i) = 0$

$x^2 - (2+i)x + 1+i = 0$

$(x-1)\{x-(1+i)\} = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 1+i$

$\therefore a + p + q = 3$

5. 이차방정식 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면
 $x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x - (12 + 6\sqrt{3}) = 0$
근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면
$$x = (\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 12 + 6\sqrt{3}}$$
$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$
$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)$$
$$\therefore x = 3\sqrt{3} + 3 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} - 1$$
큰 근은 $3\sqrt{3} + 3$
그런데 $\sqrt{3} \approx 1.7 \dots$ 이므로
가장 가까운 정수는 8이다.

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$
항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$
 $D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$
 $4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$
 m 에 관해 식을 정리하면
 $(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$
 $4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$
 $\therefore a + b = 0$

7. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

8. x 에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$ 이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α, β 이므로,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2-bx+c=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2b=c, a=-b, c=-2a$$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1, \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$

9. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면

근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $\alpha = k - 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면,

$$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$$

$$\therefore k = -2$$

10. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + p+5 = 0$ 의 두근 α, β 가 모두 양의 정수일 때, $\alpha > \beta$ 를 만족하는 순서쌍 (α, β) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = p + 1, \alpha\beta = p + 5$$

$$\therefore \alpha + \beta - 1 = \alpha\beta - 5$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$$

α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha > \beta$ 이므로

$$\alpha - 1 = 5, \quad \beta - 1 = 1$$

$$\alpha = 6, \quad \beta = 2$$

$\therefore (6, 2) \text{ 1 개}$