1. 방정식$|x-3|+|x-4|=2$의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

ii) $3\le x<4$일 때

$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $x\ge 4$일 때

$x-3+x-4=2,\ 2x=9$

$\therefore\ x=\frac{9}{2}$

따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$이고 그 합은 7

2. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

3. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

4. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

5. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$
$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

7. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

8. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α,β이므로,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합}: -\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{-b+c}{a}=\dfrac{b}{a} \\ \text{두근의 곱}: -\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c,\ a=-b,\ c=-2a$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1,\ \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=1^3-3\cdot(-2)\cdot1=1+6=7\end{aligned}$$

9. 조건 $x^2-2kx+k^2+2k+3=0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α, $\alpha+2$ 라 하면

근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+2=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha+2)=k^2+2k+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha=k-1$을 ㉡에 대입하면,

$(k-1)(k+1)=k^2+2k+3$

$\therefore\ k=-2$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+p+5=0$의 두근 α, β가 모두 양의 정수일 때, $\alpha>\beta$를 만족하는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=p+5$

$\therefore \alpha+\beta-1=\alpha\beta-5$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha>\beta$이므로

$\alpha-1=5,\quad \beta-1=1$

$\alpha=6,\quad \beta=2$

$\therefore (6,\ 2)$ 1 개