1. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식$x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m < k < n$이다. 이 때, $m^2 + n^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하려면
판별식 $D < 0$이다.
$\frac{D}{4} = k^2 - (-k + 6) < 0$
$k^2 + k - 6 < 0$, $(k + 3)(k - 2) < 0$
$-3 < k < 2$
$\therefore m = -3,\ n = 2$
$\therefore\ m^2 + n^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$

2. $ax^2 + bx + 10 > 0$의 해가 $-2 < x < 5$가 되도록 하는 $a,\ b$에 대하여 $a + b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$-2 < x < 5 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) < 0$

$x^2 - 3x - 10 < 0 \cdots$ ①

한편 $ax^2 + bx + 10 > 0$의 양변에 -1을 곱하면,

$-ax^2 - bx - 10 < 0 \cdots$ ②

①과 ②의 계수를 비교하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$

3. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

4. 부등식 $x^2 - 3|x| - 4 > 0$의 해를 구하면?

① $x < -4$ 또는 $x > 4$　　② $x < -1$ 또는 $x > 4$

③ $x < 1$ 또는 $x > -4$　　④ $-1 < x < 4$

⑤ $-1 < x < 3$

해설

부등식에 절댓값이 있으므로

(ⅰ) $x \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 > 0$

$(x+1)(x-4) > 0$

$x < -1$ 또는 $x > 4$

$x \geq 0$이므로 $x > 4$

(ⅱ) $x < 0$

$x^2 + 3x - 4 > 0$

$(x-1)(x+4) > 0$

$x < -4$ 또는 $x > 1$

$x < 0$이므로 $x < -4$

(ⅰ) (ⅱ) 로부터 $x < -4$ 또는 $x > 4$

5. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\dfrac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

6. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$
$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

7. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm^2 이상인 직사각형에서 가로의 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 ㈎ cm 이다. 이때, x 의 값의 범위는 ㈏이다. 또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)= x ㈎이다. 이것이 45 cm^2 이상이 되어야 하므로 $x\times$ ㈎ $\geq$ ㈐ 이식을 정리하면 ㈑ ≤ 0 ㈑를 인수분해하면 ㈒이다. 따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

다음 중 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑, ㈒ 에 들어갈 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㈎ $(14-x)$
② ㈏ $0 < x < 14$
③ ㈐ 45
④ ㈑ $14x - x^2 - 45$
⑤ ㈒ $(x-5)(x-9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
$= 2$(가로의 길이 + 세로의 길이)
$28 = 2x + 2\cdot$㈎, $14 = x +$㈎
$\therefore$ ㈎ $= 14 - x$
가로의 길이의 범위 : $x > 0$, $14 - x > 0 \rightarrow x < 14$
$\therefore\ 0 < x < 14\ \cdots$ ㈏
직사각형의 넓이 : $x(14-x) \geq 45$
$\therefore$ ㈐ $= 45$
㈑ $= x^2 - 14x + 45 \leq 0$
㈒ $= (x-5)(x-9) \leq 0$

8. 두 함수 $f(x)=mx^2-4x+4$, $g(x)=-2x^2+2mx$ 가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)<y<f(x)$ 를 만족시키는 실수 y 가 존재할 때, 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-3<m<0$ ② $-2<m\le 3$ ③ $0\le m<2$
④ $-2\le m<2$ ⑤ $-2<m\le 4$

해설

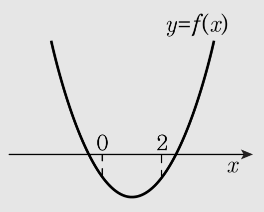
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)-g(x)>0$ 을 만족시키는 조건을 구한다.
$f(x)-g(x)=(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$
(i) $m+2=0$ 이면 $f(x)-g(x)=4>0$
따라서 $m=-2$ 일 때, 성립한다.
(ii) $m+2>0,\ \dfrac{D}{4}<0$ 에서
$-2<m<2$
(i), (ii) 에서 $-2\le m<2$

9. 부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$의 영역에 포함되어야하므로
$0 \le x \le 2$ 에서
$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.
$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면
$0 \le x \le 2$ 에서
$f(x) \le 0$ 이어야 하므로
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.
$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서
$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서
$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$
따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로
$M - m = 2$



10. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$　　② $2 < a < 5$　　③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$　　⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore D &= a^2 - 4(a+3)\\ &= a^2 - 4a - 12\\ &= (a-6)(a+2) = 0\end{aligned}$$

$\therefore a = 6\ (\because a > 0)$

11. 이차방정식 $2x^2 + 2kx + k + 2 = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 \ge 0$가 절대부등식이 되기 위한 실수 k값의 범위를 구하면?

① $1 - \sqrt{5} < k < 1 + \sqrt{5}$

② $1 - \sqrt{5} \le k \le 1 + \sqrt{5}$

③ $-2 < k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k < 6$

④ $-2 \le k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \le 6$

⑤ $-2 < k \le 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} \le k < 6$

해설

ⅰ) 서로 다른 두 실근을 가지려면,
$D' = k^2 - (2k + 4) > 0$이므로
$k^2 - 2k - 4 > 0$
$k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $k > 1 + \sqrt{5}$ $\cdots$ ①
ⅱ) $x^2 - kx + k + 3 \ge 0$이 절대부등식이 되려면
$D = k^2 - 4(k + 3) \le 0$이므로 $(k + 2)(k - 6) \le 0$
$-2 \le k \le 6$ $\cdots$ ②
①, ②의 공통범위는
$-2 \le k < 1 - \sqrt{5}$ 또는 $1 + \sqrt{5} < k \le 6$

12. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

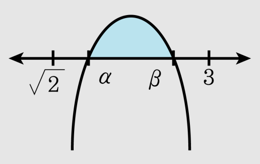
보기

ㄱ. $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$
ㄴ. $ac > 0$
ㄷ. $4a + c < 2b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



ㄱ. $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$
ㄴ. $\alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.
ㄷ. $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

13. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - x + 2a + 1$, $g(x) = 2x^2 - ax + 3a$에 대하여 $f(x) > g(x)$를 만족하는 실수 x가 존재하도록 a의 값의 범위를 정하면 $a < \alpha$ 또는 $a > \beta$이다. 이 때, 두 상수 α, β의 곱 $\alpha\beta$의 값은? (단, $\alpha < \beta$이다.)

① -5　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 5

해설

$f(x) > g(x)$ 이므로 $x^2 - x + 2a + 1 > 2x^2 - ax + 3a$
$x^2 - (a-1)x + (a-1) < 0$
위의 부등식을 만족하는 x 의 값이 존재하려면
이차방정식 $x^2 - (a-1)x + (a-1) = 0$ 의 판별식을 D라 할 때,
$\mathrm{D} > 0$ 이어야 하므로 $\mathrm{D} = (\mathrm{a}-1)^2 - 4(\mathrm{a}-1) > 0$
$(a-1)(a-5) > 0$
$\therefore a < 1$ 또는 $a > 5$
따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 5$이므로 $\alpha\beta = 5$