1. 소포를 보내려고 하는데 한 상자의 제한무게가 10kg 이라고 한다. 상품 A, B, C 의 개수가 모두 합해서 26 개이고, 중량이 각각 0.5kg, 1.2kg, 0.2kg 일 때, 한 상자에 담으면 제한무게에 딱 맞게 채워진다고 한다. 상품 C 의 개수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 13 개

해설

상품 A, B, C 의 개수를 각각 x, y, z 개라 하면

$x+y+z=26$

$0.5x+1.2y+0.2z=10$

두 식을 연립하여 x 와 y 를 각각 z 로 나타내면

$x=\dfrac{2(106-5z)}{7}$, $y=\dfrac{3(z-10)}{7}$

그런데 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이고,

x, y, z 는 자연수이므로

$\dfrac{2(106-5z)}{7} \geq 1$, $\dfrac{3(z-10)}{7} \geq 1$ 에서

z 는 $\dfrac{37}{3} \leq z \leq \dfrac{41}{2}$ 인 자연수이다.

따라서 상품 C 의 개수의 최솟값은 13 이다.

2. 지연이는 100 원짜리와 500 원짜리 동전으로만 5000 원을 가지고 있다. 100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적을 때, 500 원짜리 동전의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 7 개

해설

100 원짜리 동전의 개수를 x 개, 500 원짜리 동전의 개수를 y 개라고 하면,
$100x + 500y = 5000$, $x + 5y = 50$, $x = 5(10 - y)$
100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적다고 하였으므로,
$2y < x < 3y$, $2y < 5(10 - y) < 3y$, $\frac{25}{4} < y < \frac{50}{7}$ 이고, 이를 만족하는 자연수 $y = 7$ 이다.
500 원짜리 동전의 개수는 7 개이다.

3. 규진이는 지금까지 본 세 번의 수학시험에서 각각 92 점, 83 점, 89 점을 받았다. 네 번까지 치른 시험점수의 평균이 85 점 이상 91 점 이하가 되게 하려면 네 번째 시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라. (단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : ______ 점

▷ 정답 : 76 점

해설

$85 \le \dfrac{92+83+89+x}{4} \le 91$

$85 \times 4 \le 92+83+89+x \le 91 \times 4$

$\Rightarrow \begin{cases} 340 \le 264 + x \\ 264 + x \le 364 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x \le 264 - 340 \\ 264 + x \le 364 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 76 \\ x \le 100 \end{cases}$

$\therefore\ 76 \le x \le 100$

4. 6 톤의 물이 들어있는 물탱크에서 1 분에 0.1 톤의 물을 빼내는 양수기를 사용하여 물을 빼내려고 한다. 이 물탱크에는 시간당 일정한 양의 물이 유입된다. 물을 뺀 지 30 분이 지난 후, 남은 물의 양이 전체의 75 % 일 때, 똑같은 양수기를 최소 몇 대 더 사용하여야 물을 빼기 시작한 지 1 시간 이내에 물을 다 뺄 수 있겠는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 대

▷ 정답 : 1대

해설

1 분에 0.1 톤 씩 빼냈을 때, 30 분 동안 빼낸 물의 양은 3 톤이고, 물탱크 안의 물의 양은 6 톤의 75 % , 즉 4.5 톤이므로 30 분 동안 유입된 물의 양은 1.5 톤이다. 따라서 1 분에 0.05 톤의 물이 유입된 것을 알 수 있다.
남은 30 분 동안 4.5 톤의 물을 빼내야 하므로 1 분에 빼내는 물의 양을 x 톤이라 하면
1 분 동안 x 톤의 물을 빠져나가고 0.05 톤의 물이 유입되므로 물탱크에서 줄어드는 물의 양은 $(x - 0.05)$ 톤이다.
그런데 30 분 동안 4.5 톤 이상의 물을 빼내야 하므로
$30(x - 0.05) \geq 4.5 \quad \therefore x \geq 0.2$
따라서 1 분에 0.2 톤 이상의 물이 빠져나가려면 똑같은 양수기를 최소 1 대 더 사용해야 한다.

5. $n \le x < n+1$ (단, n은 정수) 인 실수 x에 대하여 $< x >= n-2$, $\{x\} = n+2$로 정한다. $1 \le x < 2$, $3 \le y < 4$ 일 때, $< x+y > + \{x-y\}$가 나타낼 수 있는 정수들의 총합을 구하면?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$1 \le x < 2, \quad 3 \le y < 4$에서

$4 \le x+y < 6, \quad -3 < x-y < -1$

그런데 $n \le x < n+1$이므로 조건에 맞게 범위를 나누어 값을 구해보면

$4 \le x+y < 5$에서 $< x+y >= 2$

$5 \le x+y < 6$에서 $< x+y >= 3$

$-3 < x-y < -2$ 에서 $\{x-y\}$은 정의되지 않는다.

$-2 \le x-y < -1$에서 $\{x-y\} = 0$

$\therefore < x+y > + \{x-y\} = 0+2+3$

$\therefore$ 정수들의 총합은 5

6. $[x]=1,\ [y]=2,\ [z]=-1$ 일 때 $[x+2y-z]$의 최대값과 최소값의 합은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

$[x]=1,\ [y]=2,\ [z]=-1$ 에서
$1 \le x < 2,\ 2 \le y < 3,\ -1 \le z < 0$

$$\begin{array}{r} 1 \le x < 2 \\ 4 \le 2y < 6 \\ +)\ \underline{0 < -z \le 1} \\ 5 < x+2y-z < 9 \end{array}$$

$\therefore\ [x+2y-z]=5,\ 6,\ 7,\ 8$
최대값과 최소값의 합은 $5+8=13$

7. $a < b < c$일 때, $|x-a| < |x-b| < |x-c|$의 해를 구하면?

① $x < \frac{a+b}{2}$　② $x > \frac{a+b}{2}$　③ $x < \frac{b+c}{2}$

④ $x > \frac{b+c}{2}$　⑤ $x < \frac{b-c}{2}$

해설

i) $|x-a| < |x-b|$에서 $(x-a)^2 < (x-b)^2$

$(b-a)(2x-a-b) < 0$, $b-a > 0$이므로

$x < \frac{a+b}{2}$

ii) $|x-b| < |x-c|$에서 $(x-b)^2 < (x-c)^2$

$(c-b)(2x-b-c) < 0$, $c-b > 0$이므로 $x < \frac{b+c}{2}$

i), ii) 에서 $x < \frac{a+b}{2}$ $\left(\because \frac{a+b}{2} < \frac{b+c}{2}\right)$

8. 실수 a, b, c에 대하여 $a < b < c$일 때, 부등식 $|x-a| < |x-b| < |x-c|$를 만족시키는 x 의 범위는?

① $b < x < c$　　② $\frac{1}{2}(b+c) < x$

③ $x < \frac{1}{2}(b+c)$　　④ $\frac{1}{2}(a+b) < x < b$

⑤ $x < \frac{1}{2}(a+b)$

해설

$|x-a| < |x-b|$의 양변을 제곱하면

$x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2$ 에서

$2(a-b)x > (a-b)(a+b)$

$\therefore x < \frac{a+b}{2} (\because a-b<0) \cdots\cdots ①$

또, $|x-b| < |x-c|$의 양변을 제곱하여

정리하면 $x < \frac{b+c}{2} \quad \cdots\cdots ②$

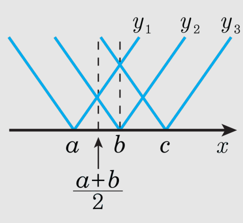
$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족하는

x의 범위는 $x < \frac{a+b}{2}$

해설

$y_1 = |x-a|$, $y_2 = |x-b|$, $y_3 = |x-c|$라 하고 각각의 그래프를 그리면 그래프에서 $y_1 < y_2 < y_3$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$y = x - a$와 $y = -x + b$의 교점 $x = \frac{1}{2}(a+b)$보다 작을 때이다.



$\therefore \ x < \frac{1}{2}(a+b)$