

1. 소포를 보내려고 하는데 한 상자의 제한무게가 10kg 이라고 한다. 상품 A, B, C 의 개수가 모두 합해서 26 개이고, 중량이 각각 0.5kg, 1.2kg, 0.2kg 일 때, 한 상자에 담으면 제한무게에 딱 맞게 채워진다고 한다. 상품 C 의 개수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

상품 A, B, C 의 개수를 각각 x, y, z 개라 하면

$$x + y + z = 26$$

$$0.5x + 1.2y + 0.2z = 10$$

두 식을 연립하여 x 와 y 를 각각 z 로 나타내면

$$x = \frac{2(106 - 5z)}{7}, y = \frac{3(z - 10)}{7}$$

그런데 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ 이고,

x, y, z 는 자연수이므로

$$\frac{2(106 - 5z)}{7} \geq 1, \frac{3(z - 10)}{7} \geq 1 \text{ 에서}$$

z 는 $\frac{37}{3} \leq z \leq \frac{41}{2}$ 인 자연수이다.

따라서 상품 C 의 개수의 최솟값은 13 이다.

2. 자연이는 100 원짜리와 500 원짜리 동전으로만 5000 원을 가지고 있다. 100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적을 때, 500 원짜리 동전의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

100 원짜리 동전의 개수를 x 개, 500 원짜리 동전의 개수를 y 개라고 하면,

$$100x + 500y = 5000, x + 5y = 50, x = 5(10 - y)$$

100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적다고 하였으므로,

$$2y < x < 3y, 2y < 5(10 - y) < 3y, \frac{25}{4} < y < \frac{50}{7} \text{ 이고, 이를}$$

만족하는 자연수 $y = 7$ 이다.

500 원짜리 동전의 개수는 7 개이다.

3. 규진이는 지금까지 본 세 번의 수학시험에서 각각 92 점, 83 점, 89 점
을 받았다. 네 번까지 치른 시험점수의 평균이 85 점 이상 91 점 이하가
되게 하려면 네 번째 시험에서 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라.
(단, 수학시험은 100 점 만점이다.)

▶ 답 : 점

▷ 정답 : 76점

해설

$$85 \leq \frac{92 + 83 + 89 + x}{4} \leq 91$$

$$85 \times 4 \leq 92 + 83 + 89 + x \leq 91 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 340 \leq 264 + x \\ 264 + x \leq 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \leq 264 - 340 \\ 264 + x \leq 364 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 76 \\ x \leq 100 \end{cases}$$

$$\therefore 76 \leq x \leq 100$$

4. 6 톤의 물이 들어있는 물탱크에서 1 분에 0.1 톤의 물을 빼내는 양수기를 사용하여 물을 빼내려고 한다. 이 물탱크에는 시간당 일정한 양의 물이 유입된다. 물을 뺀 지 30 분이 지난 후, 남은 물의 양이 전체의 75% 일 때, 똑같은 양수기를 최소 몇 대 더 사용하여야 물을 빼기 시작한 지 1 시간 이내에 물을 다 뺄 수 있겠는지 구하여라.



답 :

대



정답 : 1대

해설

1 분에 0.1 톤 씩 빼냈을 때, 30 분 동안 빼낸 물의 양은 3 톤이고, 물탱크 안의 물의 양은 6 톤의 75%, 즉 4.5 톤이므로 30 분 동안 유입된 물의 양은 1.5 톤이다. 따라서 1 분에 0.05 톤의 물이 유입된 것을 알 수 있다.

남은 30 분 동안 4.5 톤의 물을 빼내야 하므로 1 분에 빼내는 물의 양을 x 톤이라 하면

1 분 동안 x 톤의 물을 빠져나가고 0.05 톤의 물이 유입되므로 물탱크에서 줄어드는 물의 양은 $(x - 0.05)$ 톤이다.

그런데 30 분 동안 4.5 톤 이상의 물을 빼내야 하므로

$$30(x - 0.05) \geq 4.5 \quad \therefore x \geq 0.2$$

따라서 1 분에 0.2 톤 이상의 물이 빠져나가려면 똑같은 양수기를 최소 1 대 더 사용해야 한다.

5. $n \leq x < n+1$ (단, n 은 정수)인 실수 x 에 대하여 $\langle x \rangle = n-2$, $\{x\} = n+2$ 로 정한다. $1 \leq x < 2$, $3 \leq y < 4$ 일 때, $\langle x+y \rangle + \{x-y\}$ 가 나타낼 수 있는 정수들의 총합을 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$1 \leq x < 2$, $3 \leq y < 4$ 에서

$4 \leq x+y < 6$, $-3 < x-y < -1$

그런데 $n \leq x < n+1$ 이므로 조건에 맞게 범위를 나누어 값을 구해보면

$4 \leq x+y < 5$ 에서 $\langle x+y \rangle = 2$

$5 \leq x+y < 6$ 에서 $\langle x+y \rangle = 3$

$-3 < x-y < -2$ 에서 $\{x-y\}$ 은 정의되지 않는다.

$-2 \leq x-y < -1$ 에서 $\{x-y\} = 0$

$\therefore \langle x+y \rangle + \{x-y\} = 0 + 2 + 3$

$\therefore$ 정수들의 총합은 5

6. $[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 일 때 $[x + 2y - z]$ 의 최대값과 최소값의 합은?

(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

$[x] = 1$, $[y] = 2$, $[z] = -1$ 에서

$1 \leq x < 2$, $2 \leq y < 3$, $-1 \leq z < 0$

$1 \leq x < 2$

$4 \leq 2y < 6$

+) $0 < -z \leq 1$

$5 < x + 2y - z < 9$

$\therefore [x + 2y - z] = 5, 6, 7, 8$

최대값과 최소값의 합은 $5 + 8 = 13$

7. $a < b < c$ 일 때, $|x - a| < |x - b| < |x - c|$ 의 해를 구하면?

① $x < \frac{a+b}{2}$

② $x > \frac{a+b}{2}$

③ $x < \frac{b+c}{2}$

④ $x > \frac{b+c}{2}$

⑤ $x < \frac{b-c}{2}$

해설

i) $|x - a| < |x - b|$ 에서 $(x - a)^2 < (x - b)^2$
 $(b - a)(2x - a - b) < 0, b - a > 0$ 이므로

$$x < \frac{a+b}{2}$$

ii) $|x - b| < |x - c|$ 에서 $(x - b)^2 < (x - c)^2$

$$(c - b)(2x - b - c) < 0, c - b > 0 \text{ 이므로 } x < \frac{b+c}{2}$$

i), ii) 에서 $x < \frac{a+b}{2} \left(\because \frac{a+b}{2} < \frac{b+c}{2} \right)$

8. 실수 a, b, c 에 대하여 $a < b < c$ 일 때, 부등식 $|x-a| < |x-b| < |x-c|$ 를 만족시키는 x 의 범위는?

① $b < x < c$

② $\frac{1}{2}(b+c) < x$

③ $x < \frac{1}{2}(b+c)$

④ $\frac{1}{2}(a+b) < x < b$

⑤ $x < \frac{1}{2}(a+b)$

해설

$|x-a| < |x-b|$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2 \text{에서}$$

$$2(a-b)x > (a-b)(a+b)$$

$$\therefore x < \frac{a+b}{2} (\because a-b < 0) \dots\dots\dots ①$$

또, $|x-b| < |x-c|$ 의 양변을 제곱하여

$$\text{정리하면 } x < \frac{b+c}{2} \dots\dots\dots ②$$

$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족하는

$$x \text{의 범위는 } x < \frac{a+b}{2}$$

해설

$y_1 = |x-a|$, $y_2 = |x-b|$, $y_3 = |x-c|$ 라 하고 각각의 그래프를 그리면 그래프에서 $y_1 < y_2 < y_3$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$y = x-a$ 와 $y = -x+b$ 의 교점 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ 보다 작을 때이다.

$$\therefore x < \frac{1}{2}(a+b)$$

