1. 다음 보기에 주어진 수를 x라 할 때, $\sqrt{x}$가 허수가 되는 x의 개수는?

$-2,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -3.5,\ 4,\ -\frac{2}{5}$

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 7 개 ⑤ 9 개

해설

$\sqrt{x}$가 허수가 되는 $x=-2,\ -3.5,\ -\frac{2}{5}$의 3개이다.

2. 복소수 $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

3. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$$z = 3(k+2i) - k(-2i)$$
$$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow \text{순허수}$$
$$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$$

4. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow \; a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=2$ 이면,

$a^2+4a+4=0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

5. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

6. $(x-3)+(y-2)i=2+5i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $2x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 17 ⑤ 20

해설

$x-3=2,\ y-2=5$

$\therefore\ x=5,\ y=7$

$\therefore\ 2x+y=17$

7. $(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}i$ ② $4\sqrt{3}i$ ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

$$(2+\sqrt{3}i)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$$
$$=(4+4\sqrt{3}i+3i^2)+(4-4\sqrt{3}i+3i^2)$$
$$=1+4\sqrt{3}i+1-4\sqrt{3}i=2$$

8. 복소수 $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 z^2 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $z^2 = i$

해설

$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 이므로 $z^2 = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$

9. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으면?

① $2+i$의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1+\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $1-\sqrt{3}i$이다.

⑤ $1-\dfrac{1}{i}$는 실수이다.

해설

① $2+i$ 의 허수부분 : i (×)

② $-5i$ 는 순허수 (○)

③ $i^3=-i$ 허수(○)

④ $\overline{1+\sqrt{3}i}=1-\sqrt{3}i$ (○)

⑤ $1-\dfrac{1}{i}=1+i$ 복소수 (×)

10. $x=3+2i$ 일 때, $x^2-6x-10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x=3+2i$ 에서 $x-3=2i$ 의 양변을 제곱하면

$(x-3)^2=(2i)^2 \quad \therefore\ x^2-6x=-13$

$x^2-6x-10=-13-10=-23$

$\therefore\ -23$

11. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$ ② $-\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{15}i$

④ $-\sqrt{15}i$ ⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

12. 등식 $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10,\ (a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

13. a, b가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 a, b의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0$, $4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

14. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2} = i$$
$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} = i^{2008}$$
$$= (i^4)^{502} = 1$$

15. $i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$ 의 값은?

① $-26-25i$ ② $-26+25i$ ③ 0

④ $-25+26i$ ⑤ $25+26i$

해설

$i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$

$=\{i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot 1\}+\{5i+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot 1\}$

$+\cdots+\{45i+46\cdot(-1)+47\cdot(-i)+48\cdot 1\}+49i+50\cdot(-1)$

$12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

16. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0　　② i　　③ 1　　④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}=i,\ \dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2005}+(-i)^{2005}$$
$$=(i^4)^{501}\cdot i+((-i)^4)^{501}\cdot(-i)$$
$$=i+(-i)=0$$

17. $(1+i)^{10}$ 의 값은?

① $10-i$ ② $4i$ ③ $8i$ ④ $16i$ ⑤ $32i$

해설

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \left\{(1+i)^2\right\}^5 = (1+2i+i^2)^5 \\ &= (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i\end{aligned}$$

18. $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① i ② $-i$ ③ $1+i$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$i^2=-1,\ i^3=i^2\times i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$

$i^5=i^4\times i=i$

$i+i^2+i^3+i^4+i^5$

$=i+(-1)+(-i)+1+i=i$

19. $i+i^3+i^5+i^7+\cdots+i^{101}=a+bi$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변)$=i-i+i-i+\cdots+i=i$ 이므로

$i=a+bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=0,\ b=1$

$\therefore\ a+b=1$

20. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^7+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$ 을 간단히 하면?

① 0　　② $1-i$　　③ $1+i$　　④ $-2i$　　⑤ $2i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{i}=-i$$

$\therefore$ (준식) $=(i)^7+(-i)^8=-i+1$

21. $z=1-i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \bar{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{2i}{2}=i$

22. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면

$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$

$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$

$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b+3=0$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$

$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

23. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^{n}$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m+2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

24. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

25. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

26. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}} = -\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여 $|a-2|+|a|$ 의

값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \ (a < 0, b \geq 0)$$

$\therefore a \geq 0,\ a-2 < 0 \Rightarrow 0 \leq a < 2$

$\therefore |a-2|+|a| = -(a-2)+a = 2$

27. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a| + |b| - |a-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$ ② $-2b$ ③ 0 ④ $-2a$ ⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a| + |b| - |a-b| = a - b - (a-b) = 0$

28. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=\sqrt{(-3)\cdot(-3)}=\sqrt{9}=3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5\times(-2)}=\sqrt{-10}=\sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=\sqrt{\dfrac{2}{-6}}=\sqrt{-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{-10}{2}}=\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=\sqrt{3}i\sqrt{3}i=\sqrt{9}i^2=-3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5}\sqrt{2}i=\sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i}=\sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2}=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{10}{2}}i=\sqrt{5}i$

∴ 옳다.

29. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

30. 복소수 $z=(1+i)x+1-2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\quad x=-1$

31. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

32. $z = (1+i)x^2 + (2-i)x - 8 - 2i$에 대하여 $z^2 < 0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

$z = (x^2 + 2x - 8) + (x^2 - x - 2)i$

$\quad = (x-2)(x+4) + (x+1)(x-2)i$

그런데, $z^2 < 0$에서 z는 순허수이므로

$\therefore \ x = -4$

33. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

34. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다. ㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다. ㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다. ㉣ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다. ㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$

㉠ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$

$\therefore\ z = bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우

$z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z} = c + di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\frac{1}{z}} = c - di$ 이므로 참

35. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$　② $2i$　③ $1+i$　④ $1-i$　⑤ i

해설

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)=i,\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)=-i$ 이고 $i^4=1$

$$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2004}+(-i)^{2005}$$
$$=i^{4\times 501}+(-i)^{4\times 501}\times(-i)$$
$$=1+(-i)$$
$$=1-i$$