1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ -2 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k + 2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^3 - (k + 2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \quad k = -1$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$　　② $a<\frac{3}{2}$　　③ $a<\frac{3}{4}$　　④ $a>\frac{3}{4}$　　⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6\mathrm{a}+9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2$ ② $-1<k<0$ ③ $-1<k<4$

④ $k<5$ ⑤ $0<k<5$

해설

$x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$\dfrac{D}{4}=9-2k+1>0 \quad \therefore 2k<10 \quad \therefore k<5$

5. 이차방정식 $x^2 - 3x - (k-1) = 0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 3x - (k-1) = 0$이 실근을 가지므로

$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (k-1) \geq 0$

$9 + 4k - 4 \geq 0, \ 4k \geq -5$

$\therefore \ k \geq -\frac{5}{4}$

6. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2 - (k-3) > 0$

$\therefore\ k < 4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

7. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

8. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k>4$

해설

$$\frac{D}{4}=2^2-k<0$$

$\therefore\ k>4$

9. 이차방정식 $x^2+8x+2k=0$이 허근을 가지도록 하는 정수 k의 값의 최솟값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4}<0$이어야 하므로,

$16-2k<0,\ 2k>16,\ \therefore\ k>8$

$\therefore$ 정수 k의 최소값은 9

10. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2,\ k=10$ 이므로 k의 값은 12이다.

11. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

12. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$D/4 = 1 - m < 0$

$\therefore m > 1$

13. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$D' = 9-5(a-5) = -5a+34 < 0$

$\therefore a > \dfrac{34}{5}$

14. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times 3(1-k)<0$

$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$ 이므로

정수 k의 최댓값은 -2

15. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7)+3=0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7)+3=0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D<0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4\cdot(1-k)\cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

16. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$$

이어야 하므로

$$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$$

$$\therefore a=1,\ b=1$$

$$\therefore a+b=2$$

17. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.

따라서, $\dfrac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$

위의 식을 정리하면

$-k^2 + 4k - 3 = 0$

$k^2 - 4k + 3 = 0$

$(k-1)(k-3) = 0$에서

$k = 1$ 또는 $k = 3$

18. x에 대한 이차식 $2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이므로

$D=(k+1)^2-8(k-1)=0$

$(k-3)^2=0$

$\therefore\ k=3$

19. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

ㄱ $x^2 + ax + b = 0$ ㄴ $x^2 + bx + a = 0$

ㄷ $ax^2 + x + b = 0$ ㄹ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

ㄱ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

ㄴ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

ㄷ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

ㄹ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

20. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

21. 이차방정식 $x^2-2ax-3a=0$이 중근을 갖도록 하는 a의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a=-3,\ x=-3$
② $a=-3,\ x=0$
③ $a=0,\ x=-3$
④ $a=3,\ x=0$
⑤ $a=3,\ x=3$

해설

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-3a)=0$$

$a^2+3a=0,\ a(a+3)=0$

$a=-3$ 또는 0

(i) $a=-3$일 때,

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$(중근)

(ii) $a=0$일 때,

$x^2=0$

$\therefore x=0$

22. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0,\quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

24. x의 이차방정식 $x^2-(2a+2+m)x+a^2+4a-n=0$이 a의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m,n을 정할 때, $m+n$의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(2a+2+m)^2-4(a^2+4a-n)=0$

이 등식을 a에 관하여 정리하면

$4a(m-2)+m^2+4m+4n+4=0$

이 등식이 a에 관계없이 항상 성립하려면

$4(m-2)=0,\ m^2+4m+4n+4=0$

$\therefore\ m=2,\ n=-4$ $\qquad\therefore\ m+n=-2$

25. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$

정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형