1. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

2. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$　② $a=0, b=3$　③ $a=-1, b=2$
④ $a=0, b=2$　⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D' = (k-a)^2-(k^2+b-3)=0$
$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a=0,\ a^2-b+3=0$
$\therefore \quad a=0, b=3$

3. 이차방정식 $|x^2-5|=4x$의 모든 근의 합은?

① 5 ② 0 ③ 6 ④ 10 ⑤ 12

해설

i) $x^2-5\ge 0 \Rightarrow x\le -\sqrt{5}$ 또는 $x\ge \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 5

$\Rightarrow\ \ x=5$ ($\because$ ㉠)

ii) $x^2-5<0 \ \Rightarrow\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 -5

$\Rightarrow\ \ x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

4. 다음은 인수분해를 이용하여 이차방정식을 푼 것이다. ㉮에 알맞은 것은?

$11x^2-13x+2=0$ $(11x-2)($ ㉮ $)=0$ $x=\dfrac{2}{11}$ 또는 $x=1$

① $x-2$ ② $x-1$ ③ $x+1$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

x에 대한 이차방정식

$11x^2-13x+2=0$

$(11x-2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{11}$ 또는 $x=1$

따라서 ㉮는 $x-1$

5. 연산 $*$를 $a * b = ab + 2(a+b)$라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β라 한다. 이때, $|\alpha - \beta|$의 값은?

$$(3x * x) - (3 * x) + \{(-1) * 2\} = 0$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서
$3x * x = 3x \cdot x + 2(3x + x) = 3x^2 + 8x$, $3 * x = 3 \cdot x + 2(3 + x) = 5x + 6$,
$-1 * 2 = (-1) \cdot 2 + 2(-1 + 2) = -2 + 2 = 0$
주어진 식은 $3x^2 + 8x - (5x + 6) + 0 = 0$
$3x^2 + 3x - 6 = 0$ 에서 $3(x+2)(x-1) = 0$
$\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$ $\therefore$ $|\alpha - \beta| = 3$

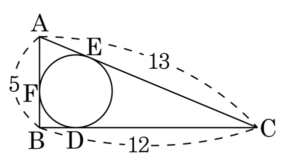
6. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 ax^2+bx+c 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설
(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

7. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$　　② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$　　④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha,\ \overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta,$

$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$

그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$이므로

$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$

$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$

$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$

두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

8. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$ ② $x^2-6x+1=0$

③ $x^2-7x+3=0$ ④ $2x^2+6x-1=0$

⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

9. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$
② $-\alpha,\ -\beta$
③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$
④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$
⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

(두 근의 합) $= \frac{b}{c} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ $\left(\therefore \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$

(두 근의 곱) $= \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$

이 때, $\frac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

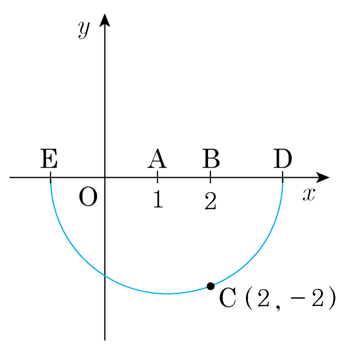
10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=10$
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$
두 근은 $\dfrac{3+\alpha}{4}$, $\dfrac{3+\beta}{4}$
$\therefore$ 두 근의 합 : $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

11. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



① A ② B ③ C
④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$이므로
$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.
$\therefore$ 점 D 의 좌표는 $(1+\sqrt{5},\ 0)$,
점 E 의 좌표는 $(1-\sqrt{5},\ 0)$ 이다.
그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a<0)$ 의 그래프가 점 E를 지나므로
$x = 1-\sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
여기서, $a,\ b,\ c$ 가 유리수이므로 $x = 1+\sqrt{5}$
($\because$ 켤레근) 또한 방정식의 근이 된다.
따라서, 그래프는 점 $D(1+\sqrt{5},\ 0)$ 을 지난다.

12. 실계수 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근을 α, β라 하면 α는 허수이고, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$은 실수이다. 이 때, $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3$의 값은?

① 0　　② -1　　③ 1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

α가 근이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
$\beta = \overline{\alpha},\ \overline{\beta} = \alpha \cdots\cdots$ ①
$\dfrac{\beta^2}{\alpha}$이 실수이므로, $\dfrac{\beta^2}{\alpha} = \overline{\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)}$
$\therefore\ \overline{\alpha}\beta^2 = \alpha\overline{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2 = \alpha\alpha^2$
$\therefore\ \beta^3 = \alpha^3$
$\therefore\ \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \dfrac{\beta^3}{\alpha^3} = 1$

13. 이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 $3-ai$ 일 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?(단, $a \neq 0, i=\sqrt{-1}$)

① 12 ② 6 ③ -6 ④ -12 ⑤ -18

해설

이차방정식 $x^2+2ax+3b=0$ 의 한 근이 복소수 $3-ai$ 이므로,
다른 한 근은 켤레근인 $3+ai$ 이다.
두 근의 합은 $(3-ai)+(3+ai)=-2a$ 이므로,
$-2a=6 \quad \therefore\ a=-3$ 이다.
두 근의 곱은 $(3-ai)(3+ai)=3b$ 이므로,
$9+a^2=3b,\ 9+(-3)^2=18=3b \quad \therefore\ b=6$
$\therefore\ ab=-18$

14. 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때 p, q를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차 방정식을 구하면?(단, p, q는 유리수)

① $x^2-x-6=0$
② $x^2+2x-8=0$
③ $x^2-x-2=0$
④ $x^2-x-12=0$
⑤ $x^2-2x-3=0$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$

$\therefore$ $x^2+px+q=0$의 두 근은 $-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$

$-p=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

$q=(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=-1$

$p=2, q=-1$이므로 $p+q=1$, $pq=-2$

$2, -1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-x-2=0$

15. x의 방정식 $x^4-2(3k+1)x^2+7k^2+3k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k>0$　　② $k<0$　　③ $k>1$
④ $k<1$　　⑤ $0<k<1$

해설

$x^2=X$로 놓으면
$X^2-2(3k+1)X+7k^2+3k=0$
이것이 서로 다른 양의 실근을 가지면 되므로
$\frac{D}{4}=(3k+1)^2-(7k^2+3k)>0,$
$\alpha+\beta=2(3k+1)>0,\ \ \alpha\beta=7k^2+3k>0$
$\therefore\ k>0$

16. x의 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2(k^2-1)=0$의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k의 최솟값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 근을 α, β라 하면

(i) 두 근이 모두 양수일 때

$\alpha+\beta=-2(k-1)>0,\ \alpha\beta=2(k^2-1)>0,$

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-1)\geq 0$

이들의 공통 범위를 구하면

$-3\leq k<-1\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,

$\alpha\beta=2(k^2-1)<0$

$\therefore\ -1<k<1\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때

$\alpha+\beta=-2(k-1)>0,\ \alpha\beta=2(k^2-1)=0$

$\therefore\ k=-1\cdots\cdots$ ㉢

구하는 k의 범위는 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢이므로

$-3\leq k\leq 1$

$\therefore$ 최솟값 -3

17. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ b^2-4ac>0$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 두 근은 모두 양이고 서로 다르다.

② 두 근은 모두 음이고 서로 다르다.

③ 양근 하나, 음근 하나를 가진다.

④ 양근, 음근, 0 을 가리지 않고 가질 수 있다.

⑤ 두 근은 서로 다른 부호이고, 양근이 음근의 절대값보다 크다.

해설

$b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$a<0,\ b>0,\ c<0$이므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}>0$

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$

$\therefore\ \alpha>0,\ \beta>0$

18. $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0<a<1$ ② $\frac{1}{2}<a<2$ ③ $1\le a<2$
④ $2<a\le 3$ ⑤ $-\frac{1}{2}<a<2$

해설

두 근을 α, β라 하면
$|음근|>양근$이므로
$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=a^2+2a-3<0$
$\therefore\ 0<a<1$