

1. 두 점 A(1), B(5)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3 + 1} = 4$$

$$\therefore P(4)$$

$$\frac{3 \times 5 - 1 \times 1}{3 - 1} = 7$$

$$\therefore Q(7)$$

$$\therefore \overline{PQ} = |7 - 4| = 3$$

2. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$$

3. 직선 $ax + by = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 직선이 $2x - 3y + 12 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선 $ax + by = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 ,
 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면

$$a(x + 2) + b(y - 3) = 1, ax + by + 2a - 3b - 1 = 0$$

이 직선이 $2x - 3y + 12 = 0$ 과 같으므로

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{-3} = \frac{2a - 3b - 1}{12}$$

이 식을 풀면 $a = 2$, $b = -3$ 이다.

$$\therefore a + b = -1$$

4. 다음 중 공집합이 아닌 유한집합을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{x \mid x \leq 1, x \text{는 자연수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 3 \text{인 자연수}\}$

③ $\{x \mid x < 2, x \text{는 소수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수 중 홀수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 25 \text{보다 큰 } 25 \text{의 배수}\}$

해설

① $\{1\}$

② $\{3, 8, 13, \dots\}$

③ $\emptyset$

④ $\{1\}$

⑤ $\{50, 75, 100, \dots\}$

5. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고 A, B 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 B 의 부분 집합인 것은?

㉠ $A \cap B = \{4\}$

㉡ $A - B = \{2, 3\}$

㉢ $(A \cup B)^c = \{5\}$

① $\{2\}$

② $\{3\}$

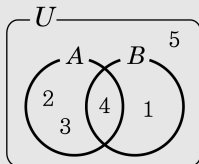
③ $\{2, 3\}$

④ $\{2, 5\}$

⑤ $\{4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B = \{1, 4\}$ 이다. 따라서 B 의 부분집합인 것은 $\{4\}$ 이다.



6. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

7. 함수 $y = \frac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$

$$\Rightarrow -2 = 3a + b \cdots \textcircled{1}$$

또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3, -2)$ 을 지나므로

$$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-2a+b}{-4}$$

$$\Rightarrow -2a + b = -12 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2, b = -8$

$$\therefore a + b = -6$$

8. 다음중 함수 $y = -\sqrt{-2x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1 사분면

② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면

④ 제 4 사분면

⑤ 제 3, 4 사분면

해설

$y = -\sqrt{-2(x-1)}+1$ 의 그래프는

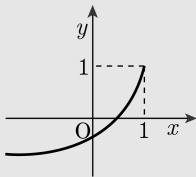
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한

다음 x 축의 방향으로 1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

그림과 같다. 따라서 함수의 그래프는

제 2 사분면을 지나지 않는다.



9. 두 점 $(4, -2)$, $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2)$, $(2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

10. 세 점 $A(3, a)$, $B(2, 1)$, $C(a+4, 2)$ 이 일직선 위에있을 때, 실수 a 의 값들의 곱은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으면

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 기울기는 같다.

$\overline{AB}$ 의 기울기와 $\overline{BC}$ 의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-a}{2-3} = \frac{2-1}{(a+4)-2}, \quad \frac{a-1}{1} = \frac{1}{a+2}$$

$$(a-1) \cdot (a+2) = 1, \quad a^2 + a - 3 = 0$$

$\therefore$ 실수 a 의 값의 곱은 -3

11. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

12. 직선 $y = ax + b$ 를 평행 이동 $g : (x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$ 에 의하여 이동하였더니, 직선 $y = 3x + 4$ 와 y 축 위의 점에서 직교하였다. $a + b$ 의 값은 ?

① 6

② $\frac{19}{3}$

③ $\frac{20}{3}$

④ 7

⑤ 8

해설

직선이 g 에 의하여 평행이동하면

$$y + 3 = a(x - 2) + b \text{ 에서 } y = ax - 2a + b - 3 \cdots \textcircled{1}$$

① 이 직선 $y = 3x + 4$ 와 y 축 위의 점에서

직교하므로 $3a = -1$

$$\therefore a = -\frac{1}{3}$$

또, y 축 위에서 직교하므로 y 절편이 같다.

$$-2a + b - 3 = 4 \text{ 에서 } \frac{2}{3} + b - 3 = 4$$

$$\therefore b = 4 + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{18}{3} = 6$$

13. 점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B(a, b)라 하면,

$\overline{AB}$ 의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$ 가

직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 위에 있으므로

$$4 \cdot \frac{1+a}{2} - 2 \cdot \frac{2+b}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore 2a - b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AB와 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 이

$$\text{수직이므로 } \frac{b-2}{a-1} \times 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 1$

$$\therefore B(3, 1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

14. 40명의 학생 중에서 수학을 선택한 학생이 20명, 국어를 선택한 학생이 17명이었다. 수학과 국어를 모두 선택한 학생이 5명 이상일 때, 수학과 국어 중 적어도 하나를 선택한 학생은 최대 a 명이고, 최소 b 명이다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 20

② 32

③ 37

④ 47

⑤ 52

해설

먼저, 모두 선택한 학생이 5명일 때가 최댓값이 나타나므로 이대로 계산해보면 $20 + 17 - 5 = 32$ 이다. 즉, $a = 32$

모두 선택한 학생의 최댓값은 17인데, 이를 통해 계산해 보면 20명이 나온다.

즉, $32 + 20 = 52$ 이다.

15. x, y 가 0보다 큰 실수일 때, $(2x + y) \left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y} \right)$ 의 최솟값은?

① 16

② 18

③ 19

④ 25

⑤ 27

해설

$$\begin{aligned}(2x + y) \left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y} \right) &= 17 + \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} \\ &\geq 17 + 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{8y}{x}} \\ &= 17 + 8 = 25\end{aligned}$$

따라서 $\frac{2x}{y} = \frac{8y}{x}$ 일 때 최솟값은 25 이다.

16. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으려면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$

㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$

㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

17. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다.
이때, $m - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$

18. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

19. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

① -18

② 18

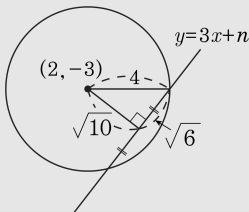
③ -22

④ 22

⑤ 0

해설

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2 \text{ 이고}$$



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2 \text{ 에 따라서 } \sqrt{10}$$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리

$$\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|9 + n| = 10$$

$$\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$$

$$\therefore 1 - 19 = -18$$

20. 집합 $A = \{2, 4, 6, \{4, 6\}\}$ 에 대하여 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 골라라.

㉠ $1 \in A$

㉡ $\{2, 4\} \subset A$

㉢ $\{4\} \in A$

㉣ $\{4, 6\} \in A$

㉤ $n(A) = 5$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

㉠ $1 \notin A$

㉢ $\{4\} \subset A$

㉣ $\{4, 6\}$ 은 집합 A 의 하나의 원소이므로
 $n(A) = 4$ 이다.

21. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}$, $C = \{3, 4, 9, 10\}$ 에 대하여 $A \cap (B \cup C)$ 를 원소 나열법으로 옳게 나타낸 것은?

① $\{2, 4\}$

② $\{4, 10\}$

③ $\{2, 3, 4\}$

④ $\{2, 4, 10\}$

⑤ $\{2, 4, 6, 10\}$

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 9, 10\}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 9, 10\} \\ &= \{2, 4, 10\} \end{aligned}$$

22. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \frac{100x + 200}{f(x)}$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

① 10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

$g(8) = k$ 라고 하면 $f(k) = 8$ 이다.

$$\Rightarrow k^2 + 2k = 8$$

$$\Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2 (\because k > 0)$$

$$\therefore (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2)$$

$$= \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50$$

23. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$$

① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$

② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$

④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$

⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$

해설

$$a + b = 5 - c, \quad a^2 + b^2 = 11 - c^2 \text{ 을}$$

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에 대입하면

$$2(11 - c^2) \geq (5 - c)^2$$

$$3c^2 - 10c + 3 \leq 0, \quad (3c - 1)(c - 3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq c \leq 3$$

24. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면?

① $\frac{f(x)}{f(x)-1}$

② $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

③ $\frac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$

⑤ $\frac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$\therefore f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{3 \frac{f(x)}{f(x)-1}}{3 \frac{f(x)}{f(x)-1} - 1}$$

$$= \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

25. $a < 0, b < 0$ 이고 $x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 일 때, $\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$ 를 a, b 로 나타내면?

① $\frac{b}{a}$

② $\frac{a}{b}$

③ $\frac{b}{2a}$

④ $-\frac{2a}{b}$

⑤ $\frac{a}{2b}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}} \\ &= \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} (\because a < 0, b < 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{1+x^2} - x = \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{1+x^2} + x = \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-b}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$