1. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

2. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$ ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$ ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠ ② ㉠ , ㉡ ③ ㉠ , ㉢

④ ㉡ , ㉢ ⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ :$\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

3. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

4. 복소수 $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1 = -3$
$\to 4z^2+4z+4 = 0$
$\to z^2+z+1 = 0$
$\to (z-1)(z^2+z+1) = 0$
$\to z^3-1 = 0$
$\to z^3 = 1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$
$= 10z^4+12x^3+10z^2$
$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$
$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$
$= 0+2$
$= 2$

5. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\dfrac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0 \qquad \therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}w-\dfrac{2}{3}=aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ a+b=-1$

6. $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2z+1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2+z+1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$\therefore z^3 = 1, \quad \bar{z}^3 = 1$

$$\begin{aligned} z^{2005}+\bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668}\cdot z + (\bar{z}^3)^{668}\cdot \bar{z} \\ &= z+\bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$