1. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$ ② $k \leq 1$ ③ $k < 3$

④ $k \leq 3$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\dfrac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore\ k \leq 3$

2. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$

② $-2<a<0,\ a>0$

③ $-2<a<0$

④ $a>2$

⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$

3. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0,\ 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

4. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot(k-1)\geq 0$

$9+4k-4\geq 0,\ \ 4k\geq -5$

$\therefore\ \ k\geq -\dfrac{5}{4}$

5. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2-x-1=0$	㉡ $x^2+x+\frac{1}{4}=0$
㉢ $2x^2-\sqrt{3}x+2=0$	㉣ $x^2-x+2=0$

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

㉠ $D=(-1)^2-4\cdot3(-1)=13>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D=1^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D=(\sqrt{3})^2-4\cdot2\cdot2=-13<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6\mathrm{a}+9$$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

7. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$x^2+1=tx$

$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로

$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

8. 이차방정식 $x^2 + 2x + k - 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2 - (k-3) > 0$

$\therefore\ k < 4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

9. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$　　② $-1 < a < 0$　　③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$　　⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

10. 두 유리수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$일 때, 이차방정식 $bx^2-5x+a=0$의 두 근의 곱은?

① -4　② -1　③ $-\frac{1}{4}$　④ 1　⑤ 4

해설

$x^2+ax+b=0$의 모든 계수가 유리수이고
한 근이 $2-\sqrt{3}$이면
다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에서
$-a=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$,
$b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$
$\therefore a=-4$, $b=1$
따라서 $bx^2-5x+a=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에서
$\frac{a}{b}=\frac{-4}{1}=-4$

11. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$일 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하면?

① -20 ② -12 ③ 5 ④ 12 ⑤ 20

해설

한 근이 $2-i$이면 다른 한 근은 $2+i$

두 근의 합 : $4=-a$

두 근의 곱 : $5=b$

$\therefore\ ab=-20$

12. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　② 0　③ 2
④ 4　⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

13. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1-i$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1+i$ 이므로
두 근의 합 : $(1+i)+(1-i)=-a \quad \therefore\ a=-2$
두 근의 곱 : $(1+i)(1-i)=b \quad \therefore\ b=2$
$\therefore\ a+b=-2+2=0$