1. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,

$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5 \cdots$ ㉠

$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면,

$m=\dfrac{2}{3}$, $n=-\dfrac{13}{3}$

$\therefore\ m-n=5$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x-2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x-2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2)=0$을 만족시키는 k를 구하면,

$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k = 6$

3. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$
② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$
④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$
⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

4. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$　② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2-b^2-c^2+2bc$　④ $a^2+b^2-c^2-2bc$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$$
\begin{aligned}
&(a-b+c)(a+b-c)\\
&=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\
&=a^2-(b-c)^2\\
&=a^2-b^2-c^2+2bc
\end{aligned}
$$

5. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$ ② 2 ③ $\dfrac{8}{5}$ ④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

6. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$　② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2},\ 2$

④ $-\frac{2}{7},\ 2$　⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은

$D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$　　② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$　　③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$　　⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & \cdots ㉠ \\ x - y = 1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

8. 부등식 $x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 의 해 중에서 정수인 해는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

$x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 에서

(i) $x-1 \le 3x-7$

$x-3x \le -7+1$

$-2x \le -6$

$\therefore \ x \ge 3$

(ii) $3x-7 < 14-x$

$3x+x < 14+7$

$4x < 21$

$\therefore \ x < \dfrac{21}{4}$

(i), (ii) 에서 $3 \le x < \dfrac{21}{4}$ 따라서 정수인 해는 $3, 4, 5$ 로 3 개이다.

9. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$$
$$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$$
$\therefore$ 6차 다항식

10. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(x+1)(y+1)(z+1)$$
$$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$$
$$= 7$$

11. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-3$

해설

두 다항식을 A, B라고 하면

$A+B=(a+b)G,\ L=abG,$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$

$\therefore\ G=x-3$

12. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -2　　④ 3　　⑤ -4

해설

$$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$xy=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{1-(-3)}{4}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=\frac{x^3+y^3}{xy}\\&=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}\\&=-2\end{aligned}$$

13. $a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이고, $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1$

$\therefore \alpha<0,\ \beta<0$

$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=(\alpha+\beta)-2\cdot\sqrt{\alpha\beta}=-3-2\cdot1=-5$

14. 두 유리수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}$일 때, 이차방정식 $bx^2-5x+a=0$의 두 근의 곱은?

① -4　② -1　③ $-\frac{1}{4}$　④ 1　⑤ 4

해설

$x^2+ax+b=0$의 모든 계수가 유리수이고
한 근이 $2-\sqrt{3}$이면
다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에서
$-a=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$,
$b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$
$\therefore a=-4,\ b=1$
따라서 $bx^2-5x+a=0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에서
$\frac{a}{b}=\frac{-4}{1}=-4$

15. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$이
서로 다른 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

$8 - k^2 - 2k > 0$, $(k+4)(k-2) < 0$

$\therefore\ -4 < k < 2$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, 0, 1$이다.

$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

16. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면

$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로

$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=-1$

17. 이차함수 $y = 6x^2 + ax + b$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

해설

이차부등식 $6x^2 + ax + b < 0$의 해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$

이므로 $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$는 이차방정식 $6x^2 + ax + b = 0$의

두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{a}{6}$에서 $a = -17$

$\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{b}{6}$에서 $b = 5$

$\therefore\ a + b = -12$

18. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$이 직선 $y = kx - 6$보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$을 이용하여 $\alpha + \beta$를 구하면,

$(1 + k)^2 - 36 < 0$

$k^2 + 2k - 35 < 0$, $(k + 7)(k - 5) < 0 \therefore\ -7 < k < 5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

19. $x=1$ 일 때 최솟값 1 을 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y=a(x-1)^2+1$$
$$=a(x^2-2x+1)+1$$
$$=ax^2-2ax+a+1$$
$$a+1=2,\ \ a=1$$
$$y=(x-1)^2+1$$
$$p=1, q=1$$
$$\therefore apq=1$$

20. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x+5y < 5 \\ -2 < 2x+7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$중 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M+2m$의 값을 구하면?

① -9　② -13　③ -18　④ -22　⑤ -26

해설

$1 < x+5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠

$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times(-2)+$ ㉡을 하면

$-10 < -2x-10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢

$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣

㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$

그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$

그런데, y는 정수이므로 $y=0,\ 1,\ 2,\ 3$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면

$(x,\ y)=(-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$

따라서, $x+y$의 최댓값은$-3+1=-2$이고,

최솟값은$-11+3=-8$이다.

$\therefore M=-2,\ m=-8\ \ \therefore\ M+2m=-18$

21. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $p < x < q$일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$의 해를 p, q를 써서 나타내면? (단, $p > 0$)

① $x > q$ 또는 $x < p$

② $\frac{1}{q} < x < \frac{1}{p}$

③ $x > \frac{1}{p}$

④ $x < \frac{1}{q}$

⑤ $x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $p < x < q$ 라면

($a < 0$ 이므로) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$

$\Leftrightarrow (x - p)(x - q) < 0$, $x - (p + q)x + pq < 0$

$p + q = -\frac{b}{a},\ pq = \frac{c}{a}$

$cx^2 + bx + a < 0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 > 0$ ($\because a < 0$)

$\Leftrightarrow pqx^2 - (p + q)x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (px - 1)(qx - 1) > 0$

$\therefore x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p} > \frac{1}{q}\right)$

22. 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$　② $b \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{3}$　④ $b \le -\frac{\sqrt{2}}{3},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \le -2,\ b \ge 2$

해설

$x^2+(a-b)x+ab-1=0$에서

$D=(a-b)^2-4(ab-1)\ge 0$

이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2-6ba+b^2+4\ge 0$이

부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4}\le 0$

이므로

$$\frac{D'}{4}=(3b)^2-(b^2+4)\le 0$$

$\therefore\ 2b^2-1\le 0$에서

$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1)\le 0$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\le b\le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\le b\le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

23. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 $\overline{\alpha}$ 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
>
> ㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면, $a = 0$이고 $\beta = 0$이다.
>
> ㉢ $\alpha = \beta$이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
>
> ㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$는 순허수이다.
>
> ㉤ $\alpha - \beta$가 실수이면 $\alpha > \beta$이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)

㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha\overline{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)

㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\ b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

24. x에 관한 방정식 $x^4+ax^2+a^4-2a^2+b^2-4b+5=0$(a, b는 실수)이 한 개의 중근(실근)과 두 허근을 갖도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 7

해설

$x^2=t$라 놓으면 $t^2+at+a^4-2a^2+b^2-4b+5=0$

x가 한 개의 중근과 두 허근을 가지려면 t는 0과 음근 하나를 가져야 한다.

두 근의 합 : $-a<0 \quad \therefore \ a>0$

두 근의 곱 : $a^4-2a^2+b^2-4b+5=0$

$(a^2-1)^2+(b-2)^2=0$

$a^2=1, \ b=2$

$\therefore \ a=1 \ (\because \ a>0), \ b=2$

$\therefore \ a+b=3$

25. 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^2 + bx + a = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, 공통근이 아닌 두 근의 합은?

① -2 ② 0 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통근을 α라 하면,

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$ ①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$ ②

① − ② : $(a-b)\alpha + (b-a) = 0, \quad (a-b)(\alpha-1) = 0$

그런데, 단 하나의 공통근을 갖기 위해서는 $a \neq b$이므로 ($a = b$ 이면 두식 일치)

$(\alpha - 1) = 0 \qquad \therefore\ \alpha = 1$

따라서, 공통근이 아닌 서로 다른 근을 $\beta,\ \gamma$라 하고, 근과 계수와의 관계를 이용하면

$1 + \beta = -a,\ 1 + \gamma = -b$

변변 더하면, $2 + (\beta + \gamma) = -(a + b) \cdots$ ①

$1 \cdot \beta = b, \quad 1 \cdot \gamma = a$

변변 더하면, $\beta + \gamma = (a + b) \cdots$ ②

따라서, ②를 ①에 대입하면

$2 + (\beta + \gamma) = -(\beta + \gamma)$

$2(\beta + \gamma) = -2 \qquad \therefore\ \beta + \gamma = -1$