1. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$ ② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$ ④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설
$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

2. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$
$\therefore\ k=3$

3. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$
② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$
③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$
④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 삼차다항식 $f(x)$와 이차다항식 $g(x)$가 다음의 세 조건을 만족한다.

(A) $f(x)$를 $g(x)$로 나누면, 몫이 $x-2$이고 나머지가 $x+6$이다.
(B) $f(x)-(x-7)g(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
(C) 방정식 $g(x)=2x+5$의 해는 $-2, 1$이다.

이 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x)=(x-2)g(x)+x+6$이므로 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-3g(-1)+5 \cdots\cdots$ ㉠
(B)에서 $f(-1)+8g(-1)=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면,
$f(-1)=8,\ g(-1)=-1 \cdots\cdots$ ㉢
(C)에서 $g(x)-(2x+5)=0$의 해가 $-2,\ 1$이므로,
$g(x)-(2x+5)=a(x+2)(x-1)$
$g(x)=a(x+2)(x-1)+2x+5$
㉢에서 $g(-1)=-2a+3=-1$이므로 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2x^2+4x+1$
$\therefore\ f(x)=(x-2)g(x)+x+6$
$\quad\quad =2x^3-6x+4=2(x-1)^2(x+2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것은 -2이다.

5. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

6. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0 \therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$ 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\{9 - 3b + a = 0\}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4},\ b = \frac{9}{4},\ ab = -\frac{81}{16}$

7. 사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

-1	1	1	-1	-7	-6
		-1	0	1	6
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 허근이므로

$(D<0\ )\alpha+\beta=-2$

8. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$

㉡ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

㉢ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㉠
② ㉠, ㉡
③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$w^2 + w + 1 = 0 \ \cdots ①$

$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots ②$

㉠ ① 식을 w로 나누면 $w + \dfrac{1}{w} = -1$

㉡ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$

$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$

$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$

㉢ $(w+1)(\overline{w}+1)$

$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$\therefore$ ㉠, ㉢ 맞음

9. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180 ② -180 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에

$(x+1)$을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

10. $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{\omega^2}{\omega^{10}+1} + \dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

(준식) $= \dfrac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \dfrac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)}$

$= \dfrac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \dfrac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2$

11. $x^2+x+1=0$일 때 $\dfrac{x^{10}+1}{x^2}$의 값을 구하여라?

① 1　　② 2　　③ 0　　④ -2　　⑤ -1

해설

$x^2+x+1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^{10}+1}{x^2}$

$=\dfrac{(x^3)^3x+1}{x^2}$

$=\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{-x^2}{x^2}$

$=-1$

$(\because\; x^2+x+1=0)$

12. x에 관한 삼차방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, $(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-\gamma^3)$의 값은?

① 4　② 2　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

$x^3+x^2+x+1=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=-1$
또한 $x^3+x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$를 곱하면
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=0,\quad x^4=1$
$\therefore \alpha^4=\beta^4=\gamma^4=1,\quad \alpha^3=\frac{1}{\alpha}, \beta^3=\frac{1}{\beta}, \gamma^3=\frac{1}{\gamma}$
$\therefore$(준식)$=(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\beta})(1-\frac{1}{\gamma})=1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha})-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$
$=1-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1+1+1+1=4$

해설

$x^3+x^2+x+1=0$을 인수분해 하면 $(x+1)(x^2+1)=0$
그러므로 $\alpha=-1, \beta=i, r=-i$라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없으므로)
$(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-r^3)=(1+1)(1+i)(1-i)$
$=2(1+1)=4$

13. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

14. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 사이에 $\alpha + \beta = \gamma$ 인 관계가 성립할 때, a 의 값은?

① -6　② -5　③ -2　④ -1　⑤ -3

해설

$x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 에서
$\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a \cdots\cdots$ ㉡
$\alpha\beta\gamma = -6 \cdots\cdots$ ㉢
문제 조건에서 $\alpha + \beta = \gamma$ 이므로
㉠에서 $2\gamma = 2, \quad \therefore \gamma = 1$
㉢에 $\gamma = 1$ 을 대입하면, $\alpha\beta = -6$
㉡에서 $\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = \alpha\beta + \gamma^2 = a$
$\gamma = 1,\ \alpha\beta = -6$ 을 대입하면 $-6 + 1 = a$
$\therefore\ a = -5$

15. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha+\beta = 2-\gamma,\ \beta+\gamma = 2-\alpha,\ \gamma+\alpha = 2-\beta$

주어진 식은 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha+\beta+\gamma) + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$