1. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$ 이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

$$(\text{좌변}) = (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

2. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

3. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$

② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$

③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$

④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면

다른 한 근은 $1-i$ 이다.

$$\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

주어진 조건에 맞는 방정식:

$$(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$$

$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 삼차다항식 $f(x)$ 와 이차다항식 $g(x)$ 가 다음의 세 조건을 만족한다.

- (A) $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누면, 몫이 $x-2$ 이고 나머지가 $x+6$ 이다.
 (B) $f(x) - (x-7)g(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.
 (C) 방정식 $g(x) = 2x+5$ 의 해는 $-2, 1$ 이다.

이 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x) = (x-2)g(x) + x+6$ 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $f(-1) = -3g(-1) + 5 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

(B)에서 $f(-1) + 8g(-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

㉠, ㉡를 연립하면,

$f(-1) = 8, g(-1) = -1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉢}}$

(C)에서 $g(x) - (2x+5) = 0$ 의 해가 $-2, 1$ 이므로,

$$g(x) - (2x+5) = a(x+2)(x-1)$$

$$g(x) = a(x+2)(x-1) + 2x+5$$

㉢에서 $g(-1) = -2a+3 = -1$ 이므로 $a = 2$

$$\therefore g(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\therefore f(x) = (x-2)g(x) + x + 6$$

$$= 2x^3 - 6x + 4 = 2(x-1)^2(x+2)$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근 중 가장 작은 것은 -2 이다.

5. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

6. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1

② 3

③ $-\frac{9}{4}$

④ $\frac{9}{16}$

⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$.
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \dots\dots \textcircled{\text{A}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \dots\dots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, b = \frac{9}{4}, ab = -\frac{81}{16}$

7. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

-1	1	1	-1	-7	-6
		-1	0	1	6
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3) = 0$$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근이 허근이므로

$$(D < 0) \alpha + \beta = -2$$

8. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

보기

㉠ $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

㉡ $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 1$

㉢ $(\omega + 1)(\bar{\omega} + 1) = 1$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$x^3 = 1,$$

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$w^2 + w + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\bar{w}^2 + \bar{w} + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

㉠ ① 식을 w 로 나누면 $w + \frac{1}{w} = -1$

㉡ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근 $w, \bar{w}$

$$w + \bar{w} = -1, w\bar{w} = 1$$

$$w^2 + \bar{w}^2 = (w + \bar{w})^2 - 2w\bar{w} = 1 - 2 = -1$$

㉢ $(w + 1)(\bar{w} + 1)$

$$= w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$\therefore$ ㉠, ㉢ 맞음

9. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{180} 의 값을 구하면?

① 180

② -180

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 양변에

$(x + 1)$ 을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

10. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{\omega^2}{\omega^{10} + 1} + \frac{\omega^{10} + 1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},$$

$$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = \frac{-(1 + \omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1 + \omega)}$$

$$= \frac{-(\omega + 1)}{(\omega + 1)} + \frac{(\omega + 1)}{-(\omega + 1)} = -2$$

11. $x^2 + x + 1 = 0$ 일 때 $\frac{x^{10} + 1}{x^2}$ 의 값을 구하여라?

① 1

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -1

해설

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^{10} + 1}{x^2}$$

$$= \frac{(x^3)^3 x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x + 1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2}$$

$$= -1$$

$$(\because x^2 + x + 1 = 0)$$

12. x 에 관한 삼차방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, $(1 - \alpha^3)(1 - \beta^3)(1 - \gamma^3)$ 의 값은?

① 4

② 2

③ 0

④ -1

⑤ -2

해설

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 에서 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \alpha\beta\gamma = -1$$

또한 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변에 $x - 1$ 를 곱하면

$$(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = 0, \quad x^4 = 1$$

$$\therefore \alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = 1, \quad \alpha^3 = \frac{1}{\alpha}, \beta^3 = \frac{1}{\beta}, \gamma^3 = \frac{1}{\gamma}$$

$$\therefore (\text{준식}) = (1 - \frac{1}{\alpha})(1 - \frac{1}{\beta})(1 - \frac{1}{\gamma}) = 1 - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) + (\frac{1}{\alpha\beta} +$$

$$\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}) - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

$$= 1 - \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

해설

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 을 인수분해 하면 $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

그러므로 $\alpha = -1, \beta = i, \gamma = -i$ 라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없으므로)

$$(1 - \alpha^3)(1 - \beta^3)(1 - \gamma^3) = (1 + 1)(1 + i)(1 - i)$$

$$= 2(1 + 1) = 4$$

13. 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = -1$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot (2) = 9 - 4 = 5$$

14. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 사이에 $\alpha + \beta = \gamma$ 인 관계가 성립할 때, a 의 값은?

① -6

② -5

③ -2

④ -1

⑤ -3

해설

$$x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\alpha\beta\gamma = -6 \cdots \cdots \text{㉢}$$

문제 조건에서 $\alpha + \beta = \gamma$ 이므로

$$\text{㉠에서 } 2\gamma = 2, \quad \therefore \gamma = 1$$

$$\text{㉢에 } \gamma = 1 \text{ 을 대입하면, } \alpha\beta = -6$$

$$\text{㉡에서 } \alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = \alpha\beta + \gamma^2 = a$$

$$\gamma = 1, \alpha\beta = -6 \text{ 을 대입하면 } -6 + 1 = a$$

$$\therefore a = -5$$

15. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$ 를 만족할 때, k 의 값을 구하면?

① 7

② 6

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4$, $\alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma$, $\beta + \gamma = 2 - \alpha$, $\gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore k = 4$