

1. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ = \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ = (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2 \\ = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※방정식에 익숙한 학생들은

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 바로 } z^2 + z + 1 = 0 \text{ 와 } z^3 = 1 \text{ 을 도출할 수}$$

있을 것이다.

$$(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$$

$$= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2$$

$$= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3$$

$$= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$

2. $z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

- ① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$$z = \frac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1, z^3 = -i, z^4 = 1$$

(준식) : $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$$1+i-1-i=0$$

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$$

$$= 0+0+\cdots+0+z^{2008}$$

$$= z^{2008}$$

$$= (z^4)^{502}$$

$$= 1$$

3. 복소수 $z = \frac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{1+i} = 1-i \\ z^2 &= -2i, \quad z^3 = -2-2i \\ \therefore z^3 - 2z^2 + 2z + 5 \\ &= (-2i-2) - 2(-2i) + 2(1-i) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} z = 1-i &\Rightarrow z-1 = -i \\ &\Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5 &= z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5 \end{aligned}$$

4. $x = \frac{1+3i}{1+i}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ 의 값은?

① $1+i$

② $1-i$

③ $-1+i$

④ $-1-i$

⑤ 1

해설

$$x = 2 + i$$

$$(x-2)^2 = i^2 = -1$$

$$\therefore x^2 - 4x = -5$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) \quad &= x(x^2 - 4x) + 4x + 1 \\ &= -5x + 4x + 1 \\ &= -x + 1 \\ &= -1 - i\end{aligned}$$