

1. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned} & (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ &= \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ &= (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※ 방정식에 익숙한 학생들은

$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2 + z + 1 = 0$ 와 $z^3 = 1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned} & (3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2 \\ &= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2 \\ &= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3 \\ &= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3 \\ &= 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. $z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$

② -1

③ 0

④ i

⑤ 1

해설

$$z = \frac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1, z^3 = -i, z^4 = 1$$

$$(\text{준식}) : 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$$

처음 네 항의 합 :

$$1 + i - 1 - i = 0$$

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$$

$$= z^{2008}$$

$$= (z^4)^{502}$$

$$= 1$$

3. 복소수 $z = \frac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1-i$$

$$z^2 = -2i, \quad z^3 = -2-2i$$

$$\therefore z^3 - 2z^2 + 2z + 5$$

$$= (-2i-2) - 2(-2i) + 2(1-i) + 5$$

$$= 5$$

해설

$$z = 1-i \Rightarrow z-1 = -i$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$$

4. $x = \frac{1+3i}{1+i}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ 의 값은?

① $1+i$

② $1-i$

③ $-1+i$

④ $-1-i$

⑤ 1

해설

$$x = 2 + i$$

$$(x-2)^2 = i^2 = -1$$

$$\therefore x^2 - 4x = -5$$

$$(\text{준식}) = x(x^2 - 4x) + 4x + 1$$

$$= -5x + 4x + 1$$

$$= -x + 1$$

$$= -1 - i$$