1. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$일 때, $x^4+y^4+z^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0=4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx=-2$

$(xy+yz+zx)^2$
$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=4$

$(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16=x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4=8$

2. $a+b=1,\ a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2000}+b^{2006}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$a+b=1$ 에서 $b=1-a$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 이므로
$a^2+(1-a)^2=-1,\ 2a^2-2a+2=0,\ a^2-a+1=0$
이 식의 양변에 $a+1$ 을 곱하면
$(a+1)(a^2-a+1)=0,\ a^3+1=0$
같은 방법으로 하면
$b^3+1=0$ 이므로 $a^3=-1,\ b^3=-1$

$$\begin{aligned}\therefore a^{2000}+b^{2006} &= (a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2\\ &= a^2+b^2=-1\end{aligned}$$

3. $x-y=1$ 이고 $x^2+y^2=-1$ 일 때, $x^{10}+y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ -2

해설

$x-y=1$ 에서 $y=x-1$

이것을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면

$2x^2-2x+2=0$

$x^2-x+1=0$

양변에 $x+1$ 을 곱하면, $x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=-1$

또 $x=y+1$ 을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면

$2y^2+2y+2=0,\ y^2+y+1=0 \therefore\ y^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{10}+y^{13} &= (x^3)^3\cdot x+(y^3)^4\cdot y\\ &= (-1)^3\cdot x+1^4\cdot y\\ &= -(x-y)=-1\end{aligned}$$