1. $\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은?

① -10 ② -7 ③ -3 ④ 0 ⑤ 5

해설

$\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡식 $x^2=25-y^2$을

㉠식에 대입하면

$25-y^2-(y+1)^2=0$

$25-y^2-(y^2+2y+1)=0$

$-2y^2-2y+24=0,\ y^2+y-12=0,$

$(y+4)(y-3)=0,$

$\therefore\ y=-4,\ 3$

ⅰ) $y=-4, x=\pm 3$

$\rightarrow \alpha+\beta=3-4=1, -3-4=-7$

ⅱ) $y=3, x=\pm 4$

$\rightarrow \alpha+\beta=4+3=7, -4+3=-1$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ii) $x=2y$일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2}$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

4. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

5. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍$(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개

④ 8개　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1,\ x = y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1,\ x = -y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

7. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서
$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$
$(x+y)^2+(x-2)^2=0$
$x,\ y$가 실수이므로 $x+y=0,\ x-2=0$
$\therefore\ x=2,\ y=-2$
$\therefore\ xy=-4$

8. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z 라 하자
$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡
㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$
$\therefore \quad x = 10$ 이면 $z = 0$
$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11 문항

9. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0$ ……㉠

$\alpha^2+\alpha+3k=0$ ……㉡

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

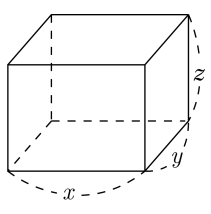
$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0$ $\therefore\ k=-4$

$\therefore\ \alpha-k=7$

10. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53 ② 56 ③ 59

④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12} = 8 \Rightarrow x+y+z = 24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12} - 8^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 204$$

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = 186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6} = \frac{xy+yz+zx}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

11. 실수 $x,\ y$에 대하여 $2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$일 때, xy 의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2+2(y+1)x+y^2-2y+5=0 \quad \cdots$㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D=(y+1)^2-2(y^2-2y+5) \geq 0$
$-y^2+6y-9 \geq 0 \ \ (y-3)^2 \leq 0$
$\therefore y=3$
$y=3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2+8x+8=0,\ x^2+4x+4=0$
$(x+2)^2=0$
$\therefore \ x=-2 \ \therefore \ xy=(-2)\cdot 3=-6$

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 5, \quad k = 7$

$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$

$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$

$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$

$\therefore\ 7 + 6 - 3 - 2 = 8$

13. $3(x^4+y^4+z^4)=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+3$을 만족시키는 양의정수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

조건식에서

$3(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2)$

$=3-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geq 0$

$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\leq 3$

$\therefore\ xy=yz=zx=1$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)$